УДК 519.246.8-37

НЕСОБСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПО РАЗНОРОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Т. В. Маланова

Иркутский национальный исследовательский технический университет

Поступила в редакцию 23.03.2019 г.

Аннотация. В данной работе рассмотрена задача прогнозирования по разнородной информации – статистическим данным и экспертным суждениям, представленным в форме неравенств, образующих несовместную систему. Для решения исследуемой задачи предложено привести ее к несобственной задаче линейного программирования и воспользоваться одним из существующих методов матричной коррекции. Коррекция задачи линейного программирования рассматривается, как частный случай задачи многокритериальной оптимизации.

Ключевые слова: прогнозирование, несовместные системы линейных алгебраических уравнений, несобственные задачи линейного программирования, полиэдральные нормы, коррекция модели.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи линейного программирования (ЗЛП) встречаются во многих областях науки и техники. При этом не всегда системы ограничений, входящие в них могут быть (по разным причинам) совместными [6, 8]. В таком случае речь идет о несобственных оптимизационных задачах. Среди причин возникновения несобственной математической модели может быть неточность исходных данных, избыточность информации об изучаемом объекте, явлении. Решение несобственных задач возможно с помощью коррекции модели, в частности, матричной коррекции [3, 4, 5, 7].

Прогнозирование каких-либо процессов в экономике, экологии, социальной сфере может быть затруднено тем, что соответствующих статистических данных недостаточно (короткий временной ряд). Причины могут быть следующие:

– изучаемый объект или явление имеет короткую предысторию в силу своей новизны (появление новой фирмы);

– исследование объекта или явления осуществляется сравнительно короткое время;

– структура объекта изменилась по каким-либо причинам (организация изменила свой статус и сферу деятельности);

– изменились внешние условия (изменились законы, нормативы, произошло чрезвычайное происшествие и пр.).

Классическое прогнозирование, основанное только на статистических данных, может привести к недостаточно достоверным результатам. Мнения экспертов в рассматриваемой области могут служить дополнительной информацией для прогнозирования [9, 10]. Одним из методов прогнозирования является метод, основанный на построении модели тренда. В этом случае поиск параметров модели тренда может быть основан на минимизации некоторой линейной функции невязки при ограничениях, основанных на экспертных суждениях. В случае взаимной противоречивости экспертных суждений задача прогнозирования сводится к несобственной ЗЛП.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть известны значения временного ряда

$$\tilde{y}(t_i) = \tilde{y}_{t_i}, \quad (1)$$

где $\tilde{t}_i$ – i-й фиксированный момент времени, $i = 1, 2, ..., m$, m – объем выборки.

В настоящей работе рассмотрим прогнозирование по модели тренда вида

$$y(t;\Theta) = (\Theta, \Phi(t)), \quad (2)$$

в которой $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ – вектор параметров модели; $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_k)$ – вектор функций времени t; выражение $(\Theta, \Phi(t)) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \varphi_i$ означает скалярное произведение.

Эксперты могут выполнять прогнозы на моменты времени $t^l > \tilde{t}_m$ в форме верхних и нижних границ возможных значений временного ряда

$$a^l \le y(t^l;\Theta) \le b^l, \quad (3)$$

$l = 1, 2, ..., L$; L – число экспертных суждений, индекс l – номер экспертного суждения – указывает на то, что время и оценки относятся к прогнозируемому периоду. Необходимо отметить, что в данной постановке задачи каждый эксперт может давать независимый прогноз исследуемого явления сразу на несколько моментов времени, т. е. формировать подсистему неравенств (3), следовательно, возможны случаи, когда одному и тому же моменту времени может соответствовать несколько прогнозных оценок.

Параметры функции тренда (2) должны быть подобраны так, чтобы ее значения были максимально близки к соответствующим значениям известного временного ряда (1). Следовательно, приходим к задаче минимизации следующей функции

$$\min_{\Theta} J(\Theta) = \min_{\Theta} \sum_{i=1}^{m} \left| \tilde{y}_{t_i} - y(t_i;\Theta) \right| \quad (4)$$

при ограничениях (3) [9].

Поскольку мнения экспертов, во-первых, должны быть независимыми, во-вторых, они формируются из личного опыта эксперта, его интуиции, то полученная в результате опроса нескольких экспертов система неравенств (3) вполне естественно может оказаться несовместной, тогда задача (3), (4) становится несобственной.

В настоящей работе предложен подход для решения полученной задачи, основанный на коррекции системы неравенств (3). Целесообразно корректировать данную систему так, чтобы ее коэффициенты и свободные члены подвергались наименьшим изменениям, то есть исходя из минимизации какого-либо критерия качества, отражающего изменения матрицы коэффициентов и свободных членов (например, полиэдральной нормы). В итоге получаем две целевые функции, которые нужно минимизировать, следовательно, в общем случае имеем задачу многокритериальной оптимизации.

2. ПЕРЕХОД К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Наиболее подробно задачи коррекции рассмотрены в рамках ЗЛП с ограничениями в форме системы уравнений. Воспользуемся подходом, предложенным в [9] для перехода к данному классу задач.

Введем дополнительные переменные

$$r_{t_i} = \begin{cases} \tilde{y}_{t_i} - y(t_i;\Theta), \text{ если } \tilde{y}_{t_i} > y(t_i;\Theta), \\ 0, \text{ если } \tilde{y}_{t_i} \le y(t_i;\Theta), \end{cases}$$

$$s_{t_i} = \begin{cases} y(t_i;\Theta) - \tilde{y}_{t_i}, \text{ если } \tilde{y}_{t_i} < y(t_i;\Theta), \\ 0, \text{ если } \tilde{y}_{t_i} \ge y(t_i;\Theta), \end{cases}$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Тогда формула (4) эквивалентна следующей

$$\max_{\mathbf{\theta}, \mathbf{r}, \mathbf{s}} \sum_{i=1}^{m} -r_{t_i} - s_{t_i}. \quad (5)$$

Очевидно, что здесь появляются дополнительные условия

$$y(t_i;\Theta) + r_{t_i} - s_{t_i} = \tilde{y}_{t_i}, \; i = \overline{1, m},$$

при

$$r_{t_i}, \; s_{t_i} \ge 0, \; i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Далее от системы неравенств (3) перейдем к системе уравнений, добавив соответствующие слагаемые:

$$\begin{cases} y(t_l;\Theta) + z_l = b_l, \\ -y(t_l;\Theta) + z_{L+l} = -a_l, \end{cases}$$

$$z_l, z_{L+l} \geq 0,\ l = \overline{1,L}. \qquad (7)$$

Если $y(t;\Theta)$ является линейной моделью, то есть

$$y(t;\Theta) = \theta_1 + \theta_2 t, \qquad (8)$$

то из (7) и (8) получаем

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 t_l + z_l = b_l, \\ -\theta_1 - \theta_2 t_l + z_{L+l} = -a_l, \end{cases}$$

$$z_l, z_{L+l} \geq 0,\ l = \overline{1,L}. \qquad (9)$$

В матричном виде система уравнений (6), (9) примет вид

$$Ax = b, \qquad (10)$$

где A, x, b представлены на рис. 1. Здесь под $t_1, t_2, ..., t_l$ понимаем моменты времени, на которые осуществляется прогноз, а под $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_l$ – моменты времени, на которые известны значения временного ряда. Матрица A имеет размерность $(2L + m \times 2 + 2L + 2m)$.

Для выполнения условия неотрицательности координат вектора свободных переменных воспользуемся заменой переменных:

$$\theta_1 = \theta_3 - \theta_4,$$

$$\theta_2 = \theta_5 - \theta_6, \qquad (11)$$

при $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6 > 0$.

Тогда из (9) с учетом (11) получаем

$$\begin{cases} \theta_3 - \theta_4 + (\theta_5 - \theta_6) t_l + z_l = b_l, \\ -\theta_3 + \theta_4 - (\theta_5 - \theta_6) t_l + z_{L+l} = -a_l \end{cases}$$

при $l = \overline{1,L}$. Вектор x и матрица A примут вид (рис. 2).

Таким образом, из исходной задачи прогнозирования получена несобственная задача линейного программирования (5), (10), (12).

3. КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМЫ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПО МИНИМУМУ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОРМ

Чтобы получить решение задачи (5), (10), (12), выполним коррекцию матрицы по минимуму следующей полиэдральной нормы [1, 2, 3]

$$\left\| \overline{A} \right\|_{1,\infty} = \max_{i,j} \left| a_{i,j} \right|. \qquad (13)$$

В работах [1, 2] рассмотрен подход к коррекции системы ограничений несобственной задачи линейного программирования вида (5), (10), (12).

Задача матричной коррекции системы линейных алгебраических уравнений заключается в следующем: найти матрицу $\begin{bmatrix} h & H \end{bmatrix} \in R^{2L+m \ \times \ 4+2L+2m}$ с минимальной полиэдральной нормой (13) такую, что система $(A+H)x = b - h$ становится совместной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & t_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & t_L & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & -t_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & -t_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -t_L & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & \tilde{t}_1 & 1 & 0 & ... & 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \tilde{t}_2 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & \tilde{t}_m & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2L} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_L \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_L \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{pmatrix}.$$

Рис. 1

$$A=\begin{pmatrix}
1 & -1 & t_1 & -t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
1 & -1 & t_2 & -t_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & ..\\
1 & -1 & t_L & -t_L & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
-1 & 1 & -t_1 & t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
-1 & 1 & -t_2 & t_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & ..\\
-1 & 1 & -t_L & t_L & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\
1 & -1 & \tilde{t}_1 & -\tilde{t}_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
1 & -1 & \tilde{t}_2 & -\tilde{t}_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & ..\\
1 & -1 & \tilde{t}_m & -\tilde{t}_m & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}\theta_3\\ \theta_4\\ \theta_5\\ \theta_6\\ r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_m\\ s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_m\\ z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_{2L}\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_L\\ -a_1\\ -a_2\\ \vdots\\ -\mathrm{a}_L\\ \tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \vdots\\ \tilde{y}_m\end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Рис. 2

В настоящей работе всю матрицу A, как и весь столбец b корректировать не имеет смысла. Поскольку прогнозные оценки имеют лишь вероятностный характер, то корректировать будем только те элементы матриц A и b, которые соответствуют экспертным оценкам – первые $2L$ строк первых четырех столбцов матрицы A и первые $2L$ элементов столбца b.

Тогда несобственная задача ЗЛП эквивалента следующей

$$\min_{u,z,y} u \qquad (14)$$

при условии

$$\begin{cases} u \ge b_i g - a^i q,\ i=\overline{1,2L},\\ u \ge -b_i g + a^i q,\ i=\overline{1,2L},\\ g+\sum_{j=1}^{4} q_j = 1,\\ b_i g - a^i q = 0,\ i=\overline{2L+1,2L+m},\ g\ne 0,\\ \sum_{j=1}^{4+2m+2L} c_j q_j - c_0 g \ge 0,\\ g\ge 0, q\ge 0, u\ge 0, \end{cases} \qquad (15)$$

где c – вектор коэффициентов целевой функции (5); $g=\dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{4} x_j}$; $q=xg$; u – функция, позволяющая минимизировать норму (13), в общем случае исходя из равенства, полученного с учетом неотрицательности x [1, 2]:

$$\max_{ij}\left(h_{ij}\right)=\frac{\max\limits_{0\le i\le 2L+m}\left(b_i - a^i x\right)}{1+\sum_{j=1}^{4+2L+2m} x_j}.$$

Как видим, задача (5), (10), (12) в связи с несовместностью системы (10) дополняется задачей минимизации полиэдральной нормы матрицы, следовательно, имеем задачу многокритериальной оптимизации, в которой метод главного критерия реализован с помощью формул (14), (15). Здесь в качестве главной критериальной функции выбрана функция u, а значения целевой функции (5) ограничены снизу величиной $c_0 g$ в условиях (15).

4. ПРИМЕР

Рассмотрим следующий пример. В табл. 1 и 2 представлены соответственно короткий временной ряд и прогнозы экспертов. Найдем параметры линейного тренда на основе всей имеющейся информации с применением рассматриваемого в данной статье похода.

Таблица 1

Статистические значения на периоде основания прогноза

t	6	7	8	9	10	11	12
y_{st}	4	3	5	6	7	6	9

Таблица 2

Прогнозы экспертов, представленные диапазонами возможных значений

Эксперт	t	y_{min}	y_{max}
Эксперт 1	14	10	11
Эксперт 2	15	7	8
Эксперт 3	16	8	9
Эксперт 4	17	11	12

На рис. 3 экспертные оценки изображены в форме вертикальных отрезков. Ясно, что ни одна прямая не может пересечь все четыре отрезка, что означает несовместность системы ограничений в задаче (5), (10), (12).

Выполнив преобразования исходных данных сначала по формулам (5), (10), (12), решаем задачу (14),(15), в которой корректируется матрица A. Вернувшись к исходным переменным, получаем следующий график линейного тренда (рис. 3).

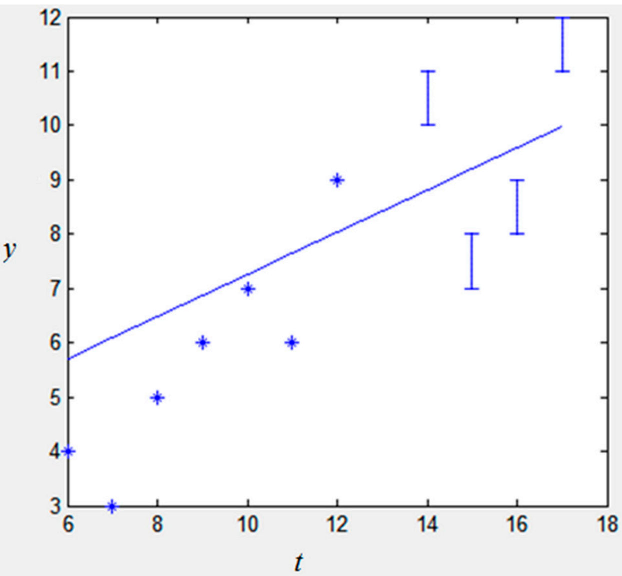

Рис. 3

Уравнение линии тренда имеет вид:

$$y = 3{,}3731 + 0{,}388t.$$

Поскольку задача прогнозирования по разнородной информации с противоречивыми экспертными оценками относится к классу многокритериальных задач, то в данном случае получено одно решение из множества возможных. Варьируя значения c_0, можно получать различные решения. Задавая c_0, лицо, принимающее решение, определяет на сколько важной должна быть близость значений полученной модели к исходным статистическим данным (чем меньше c_0, тем существеннее близость линии тренда к статистическим данным). Рассматриваемую задачу можно рассмотреть и как, задачу структурной коррекции, в которой корректируются только второй и четвертый столбцы матрицы A, а также вектор свободных членов b.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, прогнозирование исследуемого процесса по статистическим данным и мнениям экспертов возможно даже при возникновении противоречивых экспертных суждений. Сведение исходной задачи к несобственной ЗЛП позволяет решать задачу коррекции полученной модели в рамках новой ЗЛП классическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баркалова, О. С.* Коррекция несобственных задач классификации по минимуму различных видов полиэдральных норм / О. С. Баркалова // Качество. Инновации. Образование. – М. : Европейский Центр по Качеству, 2013. – № 2. – С. 39–43.

2. *Баркалова, О. С.* Коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме по минимаксному критерию / О. С. Баркалова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 12. – С. 1624–1634.

3. *Горелик, В. А.* Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений / В. А. Горелик, В. И. Ерохин, Р. В. Печенкин. – М. : ВЦ РАН, 2006. – 150 с.

4. *Горелик, В. А.* Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений / В. А. Го-

релик // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Е. 41, № 11. – С. 1697–1705.

5. *Горелик, В. А.* Коррекция системы ограничений задачи линейного программирования с минимаксным ограничением / В. А. Горелик, Р. Р. Ибатуллин // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. – М. : Дородницынский ВЦ РАН, 2001. – С. 89–107.

6. *Еремин, И. И.* Противоречивые модели оптимального управления / И. И. Еремин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 160 с.

7. *Ерохин, В. И.* О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений / В. И. Ерохин, А. С. Красников, М. Н. Хвостов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 144–156.

8. *Мазуров, В. Д.* Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации / В. Д. Мазуров. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 248 с.

9. Прогнозирование временных рядов по разнородной информации / В. Б. Головченко. – Новосибирск : Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. – 88 с.

10. *Тамбиева, Д. А.* К проблеме недостаточности информации. Малые выборки или «очень короткие» временные ряды / Д. А. Тамбиева, Е. В. Попова, Ш. Х. Салпагарова // Политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ. – 2015. – № 107. – С. 126–141.

Маланова Татьяна Валерьевна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры автоматизированных систем Иркутского национального исследовательского технического университета.
E-mail: malanova_tanya@mail.ru

IMPROPER PROBLEM OF FORECASTING BASED ON HETEROGENEOUS INFORMATION

T. V. Malanova

Irkutsk National Research Technical University

Annotation. The paper considers the problem of forecasting based on heterogeneous information, i. e. the statistical data and expert judgments represented in the form of inequalities that form an inconsistent system. To solve the studied problem, it is proposed to reduce it to an improper linear programming problem and use one of the existing methods of matrix correction. The correction of the linear programming problem is considered as a special case of the multi-objective optimization problem.

Keywords: forecasting, incosistent systems of linear algebraic equations, improper linear programming problems, polyhedral norms, model correction.

Malanova Tatyana Valeryevna – Candidate of Technical Sciences, assistant professor of Department of Automated Systems, Irkutsk National Research Technical University
E-mail: malanova_tanya@mail.ru