

## ЗАЩИТА СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЛ АППАРАТАМИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМИ ГРАНИЦАМ

© 2020 Г. Ш. Цициашвили<sup>✉1</sup>, М. А. Осипова<sup>1,2</sup>, В. С. Заболотский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН  
ул. Радио, 7, 690041 Владивосток, Российская Федерация

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет  
п. Аякс, 10, 690922 остров Русский, Приморский край, Российская Федерация

**Аннотация.** В настоящей работе исследованы две стратегии защиты от посторонних объектов тел, расположенных в узлах квадратной решетки (сетевая структура тел). Речь идет о защите самодвижущимися аппаратами, перемещающимися по границе области, в которой находится сетевая структура. В работе рассмотрены не только круговые области, но и области произвольного вида, а именно, с кусочно-линейной и с выпукло-вогнутой гладкой границами. Доказано преимущество модели групповой защиты тел (аппараты движутся по границе области большого радиуса) перед моделью защиты каждого тела в отдельности (аппараты движутся по окружности диаметра равного шагу решетки). Показано, что отношение минимального количества аппаратов, используемых в индивидуальной стратегии защиты, к минимальному количеству аппаратов, используемых для групповой стратегии защиты, пропорционально линейному размеру области. Полученные результаты основаны на параметризации модели по линейному размеру области, на доказательстве асимптотических соотношений для областей с различными границами и на идее вычисления площади внутренней полосы рассматриваемых областей ширины, равной длине диагонали квадрата решетки. В свою очередь, при групповой стратегии защиты сетевой структуры тел достигается единичная вероятность обнаружения постороннего объекта, если самодвижущиеся аппараты перемещаются вдоль границы на расстоянии обзора локатора между соседними аппаратами (по траектории движения) равном удвоенному радиусу обзора. Данная задача возникает в связи с интенсивным изучением структур, порождаемых самодвижущимися частицами. При этом число самодвижущихся частиц предполагается достаточно большим, что вызывает определенные трудности при их технической реализации.

**Ключевые слова:** индивидуальная защита, групповая защита, площадь полосы, квадратная решетка, самодвижущиеся аппараты, кривизна, выпукло-вогнутая граница.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время внимание исследователей сосредоточено на изучении структур, порождаемых группами самодвижущихся ча-

стиц (см., например, [1]). Анализ этих структур приводит к необходимости решения различных задач, связанных с теорией динамических систем. Модельными объектами могут быть системы частиц, изучаемые в рамках статистики Максвелла — Больцмана, Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна. Число самодвижущихся частиц, как правило, счита-

---

✉ Цициашвили Гурами Шалвович  
e-mail: [guram@iam.dvo.ru](mailto:guram@iam.dvo.ru)



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

ется достаточно большим. В частности, такие предположения используются при моделировании движения транспортных средств, толпы и стаи [2, 3], финансовых рынков и других социально-экономических систем [1]. В связи с этим следует отметить модель квантовой экономики [4], в которой большое количество самодвижущихся частиц приводит к появлению синергетических эффектов, т. е. к нелинейной (экспоненциальной или степенной) зависимости характеристик модели от числа частиц.

В то же время системы самодвижущихся частиц аналогичны по механическим свойствам системам мобильных роботов, для описания которых используются модели дифференциальных игр (см., например, [5]), лежащие в основе систем искусственного интеллекта. В рамках этих моделей решаются различные задачи: определение кратчайшей траектории робота или группы роботов, охватывающей всю область наблюдения (см., например, [6]), поиск минимального количества роботов, гарантирующих захват [7], и многие другие. В последнее время особый интерес приобретают задачи защиты сетевых структур тел с помощью систем самодвижущихся частиц. Исследования по этой тематике ведутся в двух направлениях: первое основано на моделях случайных графов [8–10], а второе — на моделях стохастической геометрии [11–13]. В настоящей работе планируется продолжить геометрический подход.

В работе [12], развивая результаты работы [11], для группы тел (назовем ее сетевая

структура), расположенных в узлах квадратной решетки, содержащейся в круговой области большого радиуса, пропорционального  $m$ ,  $m \gg 1$ , рассмотрено две модели защиты. Модель 1 (рис. 1) предполагает защиту от проникновения постороннего объекта (на рис. 1 указан стрелкой) в каждый узел отдельной группой аппаратов, движущихся по окружности диаметра равного шагу решетки, модель 2 (рис. 1) предполагает защиту сетевой структуры одной группой аппаратов, движущихся по окружности большого радиуса. Доказано, что  $M_1(m)/M_2(m) \sim m$ , где  $M_i(m)$  — минимально необходимое число аппаратов для защиты по модели  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Таким образом, для защиты по модели 2 требуется приблизительно в  $m$  раз меньше аппаратов, чем для защиты по модели 1.

В свою очередь, асимптотические формулы, полученные в работах [14–16] для числа узлов квадратной решетки, находящихся в круговой области, базируются на использовании оценок Ф. Гаусса, построенных на основе вычисления площади полосы, проходящей вдоль границы круговой области. Однако рассмотрение лишь круговых областей существенно ограничивает практическое применение полученных в [12] результатов. А использование идеи Гаусса может позволить распространить эти результаты на сетевые структуры, содержащиеся в плоских областях более общего типа.

В настоящей работе для сетевой структуры, расположенной в различных областях с размерами, пропорциональными  $m$ ,  $m \gg 1$ ,

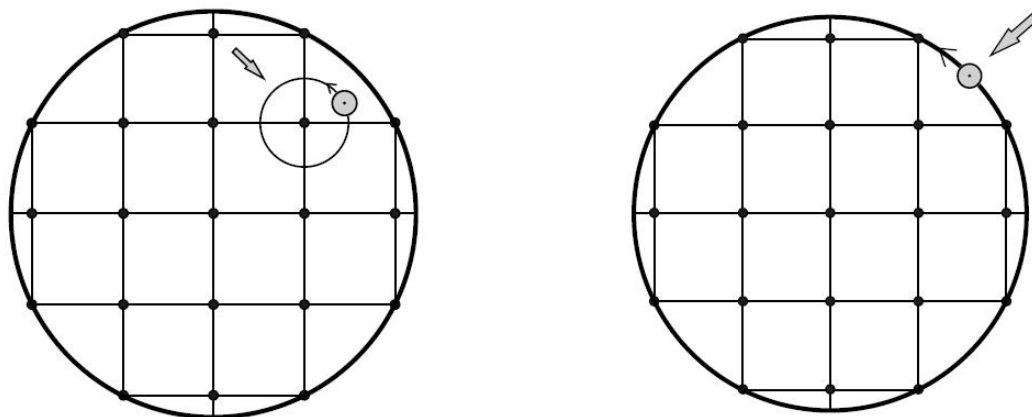


Рис. 1. Модель 1 (слева), модель 2 (справа)

Fig. 1. Model 1 (left), model 2 (right)

были получены асимптотические формулы для отношения минимального количества аппаратов (двигаются по границе области), используемых для групповой стратегии, к минимальному количеству аппаратов (двигаются по окружности диаметра равного шагу решетки), используемых в индивидуальной стратегии. Речь идет о многоугольнике и об области с выпуклой или с выпукло-вогнутой гладкой границей. Если в первом случае решение базируется на геометрическом подходе, то во втором случае дополнительно потребовалось предположить ограниченность модуля кривизны границы области. Полученные результаты основаны на идее Гаусса о вычислении площади внутренней полосы рассматриваемых областей ширины, равной длине диагонали квадрата решетки. Показано, что сохраняется существенное преимущество (пропорционально линейному размеру  $m$ ) модели 2 по сравнению с моделью 1.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на плоскости задана непрерывная, замкнутая и несамопересекающаяся кривая  $\Gamma$ . По теореме Жордана (см., например [17, теорема 0.5]) множество  $R^2 \setminus \Gamma$  состоит из двух линейно связных областей. Обозначим  $G$  ограниченную (кривой  $\Gamma$ ) компоненту связности.

Предположим, что множество  $G$  содержит квадрат  $1_h$  со стороной  $h/\sqrt{2}$ . Подвергнем плоскость растяжению по обеим координатам в  $m \gg 1$  раз. Обозначим  $mG$ ,  $m\Gamma$ ,  $1_{hm}$  результаты такого растяжения области  $G$ , кривой  $\Gamma$  и квадрата  $1_h$ . Построим на плоскости квадратную решетку со стороной квадрата  $h/\sqrt{2}$  так, чтобы стороны квадрата  $1_{mh}$  лежали на прямых, составляющих решетку. Обозначим  $N(mG)$  число узлов решетки, содержащихся в множестве  $mG$ . Очевидно, что выполняется неравенство

$$N(mG) \geq m^2. \quad (1)$$

Около каждого узла решетки опишем окружность диаметром  $h/\sqrt{2}$  и на ней расположим центры кругов диаметром  $d$ ,  $d \ll h$ , так, чтобы их угловые расстояния между цен-

трами соседних кругов совпадали, а сами круги пересекались. Минимальное число  $k$  кругов, покрывающих одну окружность, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\pi}{\arcsin \frac{d\sqrt{2}}{h}} \leq k \leq \frac{\pi}{\arcsin \frac{d\sqrt{2}}{h}} + 1. \quad (2)$$

Тогда минимальное число  $M_1(m)$  кругов, покрывающих все окружности, вследствие (1) удовлетворяет неравенству

$$M_1(m) \geq m^2 k. \quad (3)$$

Обозначим  $L = L(\Gamma)$  длину кривой  $\Gamma$ . Расположим на кривой  $m\Gamma$  центры кругов диаметром  $d$  так, чтобы центры соседних кругов были удалены друг от друга на расстояние  $d$  вдоль кривой  $m\Gamma$  и чтобы кривая  $m\Gamma$  была полностью покрыта кругами. Тогда минимальное число  $M_2(m)$  таких кругов удовлетворяет неравенству

$$M_2(m) \leq \frac{mL}{d}. \quad (4)$$

Из формул (3), (4) следует, что

$$\frac{M_2(m)}{M_1(m)} \leq \frac{L}{mdk} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Для определенных классов кривых планируется улучшить оценку (5) следующим образом. Каждой точке  $A \in m\Gamma$  сопоставим круг радиуса  $h$  и обозначим  $A_h$  пересечение этого круга с областью  $G$ . Определим полосу  $m\Gamma^h = \bigcup_{A \in m\Gamma} A_h$  ширины  $h$ . Справедливо неравенство

$$N(mG) \geq \frac{mes(mG) - mes(m\Gamma^h)}{h^2} = \frac{m^2 mes(G) - mes(m\Gamma^h)}{h^2}, \quad (6)$$

в котором  $mes(Q)$  — лебегова мера множества  $Q$ . Предположим, что при  $M > 0$ ,  $M \in R$ , выполняется неравенство

$$mes(m\Gamma^h) \leq mM, \quad (7)$$

тогда

$$\frac{M_2(m)}{M_1(m)} \leq \frac{mLh^2}{dk(m^2 mes(G) - mes(m\Gamma^h))} =$$

$$= \frac{Lh^2}{m \operatorname{dk} \left( \operatorname{mes}(G) - \frac{M}{m} \right)}. \quad (8)$$

Остановимся на двух частных случаях множества  $mG$ , для которых удастся подобрать константу  $M$ : многоугольник, односвязная область с гладкой выпукло-вогнутой границей.

## 2. МНОГОУГОЛЬНИК

Пусть область  $mG$  является многоугольником с границей  $m\Gamma$ . На рис. 2 изображена внутренняя полоса  $m\Gamma^h$  многоугольника шириной  $h$ .

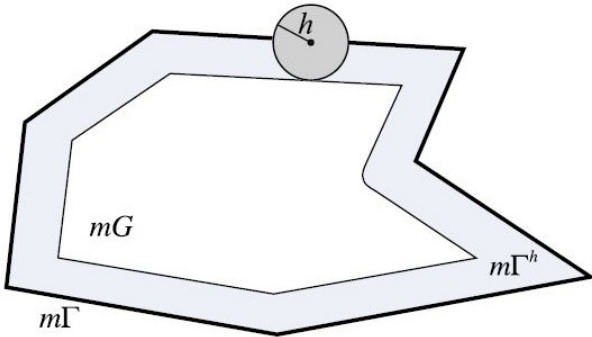


Рис. 2. Внутренняя полоса многоугольника  
Fig. 2. The inner band of the polygon

**Теорема 1.** Площадь полосы  $m\Gamma^h$  многоугольника  $mG$  с внутренними углами  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}(m\Gamma^h) \leq mM, \quad M = Lh - \sum_{i=1}^n \frac{h^2}{m} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2}. \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть граница  $m\Gamma$  многоугольника состоит из отрезков  $m\Gamma_1, \dots, m\Gamma_n$  (сторон многоугольника). На каждом отрезке  $m\Gamma_i$  построим внутри области  $mG$  прямоу-

гольник высотой  $h$ . Рассмотрим три случая: 1)  $\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ; 2)  $\alpha_i \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ; 3)  $\alpha_i \in (\pi, 2\pi)$  (рис. 3). Из рис. 3 автоматически следует неравенство (9). Теорема доказана.

## 3. МНОЖЕСТВА С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Пусть несамопересекающаяся, замкнутая кривая  $\Gamma$  задана периодической с периодом  $T$  гладкой функцией  $(x(t), y(t))$ , а ее кривизна  $k(t) = \frac{y''x' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при некотором  $K$  удовлетворяет неравенству  $\max_{0 \leq t \leq T} |k(t)| = K < \infty$ .

**Выпуклые множества.** Пусть область  $mG$  является выпуклой и кривая  $m\Gamma$  имеет во всех точках положительную кривизну, не превосходящую  $K/m$  (рис. 4).

**Теорема 2.** Площадь полосы  $m\Gamma^h$  выпуклой области  $mG$  удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}(m\Gamma^h) \leq mM, \quad M = \frac{7L^2}{36} + Lh. \quad (10)$$

**Доказательство.** Разобьем кривую  $m\Gamma$  на  $n$  смежных участков длины  $\sigma = mL/n$ , где

$$n > \max(3LK, m). \quad (11)$$

Каждый участок кривой  $m\Gamma$  длины  $\sigma$  заменим отрезком (рис. 4). Из определения кривизны следует, что угол  $\gamma$  между касательными к крайним точкам участка длины  $\sigma$  (см. рис. 8) не превосходит  $\sigma K/m$  (см. [18, Гл. VII, § 5]). Тогда площадь  $S$  получившейся криволинейной трапеции, ограниченной сверху площадью треугольника с основанием длины

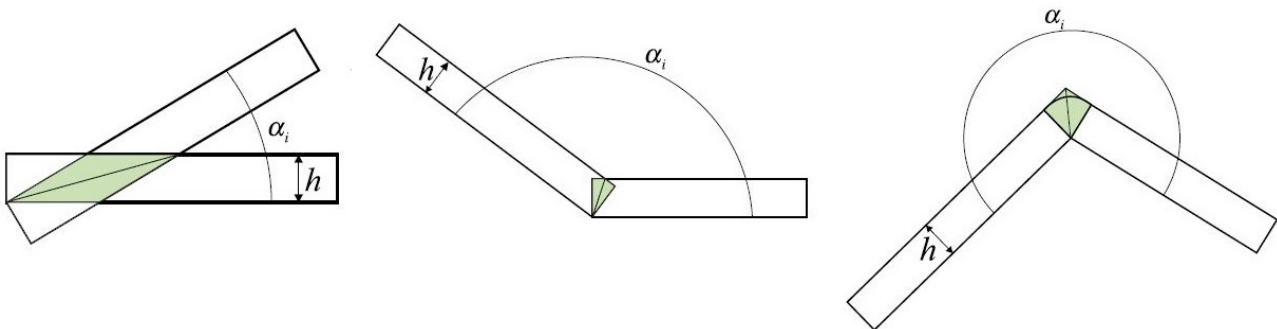


Рис. 3. Случай 1 (слева), случай 2 (по центру), случай 3 (справа)  
Fig. 3. Case 1 (left), case 2 (center), case 3 (right)

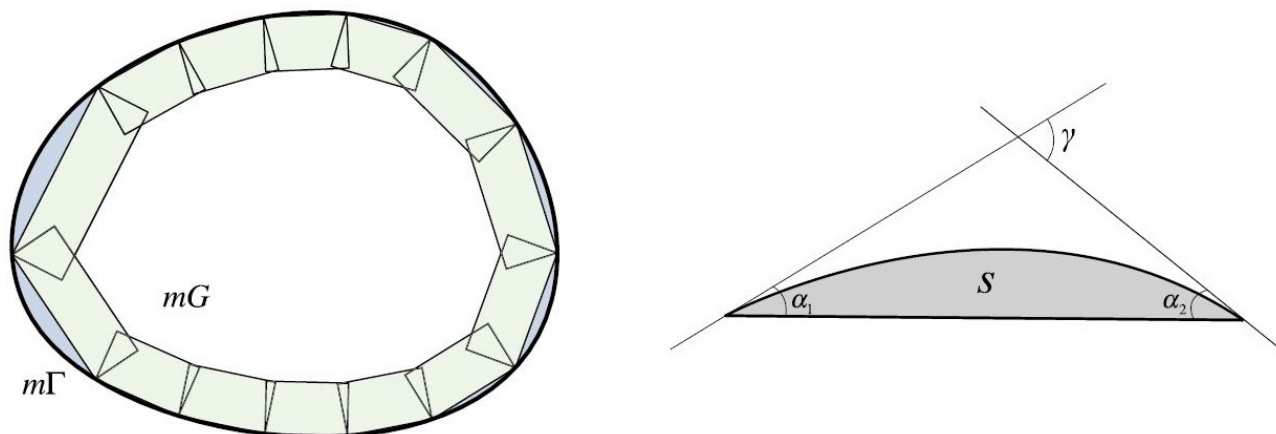


Рис. 4. Выпуклое множество  $G$  с гладкой границей  $\Gamma$  (слева) и частичная граница  $\Gamma_i$  (справа)  
 Fig. 4. Convex set  $G$  with smooth border  $\Gamma$  (left) and partial border  $\Gamma_i$  (right)

$\sigma$  и углами  $\alpha_1, \alpha_2 < \gamma \leq \sigma K / m$ , удовлетворяет неравенству  $S \leq \frac{\sigma^2 \operatorname{tg}(\sigma K / m)}{2}$ .

Рассмотрим ряд Тейлора функции  $\operatorname{tg} x, 0 \leq x \leq 1/3$ , в окрестности точки 0 с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^2}{2} \operatorname{tg}'' \theta = x + x^2 \frac{\sin \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^{3/2}} < < x + x^2 \frac{\theta}{(1 - \theta^2)^{3/2}} < \frac{7x}{6}, 0 < \theta < x < 1/3.$$

Отсюда следует, что при условии  $\frac{\sigma K}{m} < \frac{1}{3}$  выполняется неравенство  $S \leq \frac{7\sigma^3 K}{12m}$ , а при условии (11) суммарная площадь криволинейных трапеций не превосходит  $\frac{7mL^2}{36}$ . Добавляя суммарную площадь  $mLh$  прямоугольников с высотой  $h$ , примыкающих основанием к криволинейным трапециям, получаем соотношение (10). Теорема доказана.

**Выпукло-вогнутая граница.** Пусть кривизна  $k(t)$  кривой  $\Gamma$  меняет на отрезке  $[0, T]$  знак  $2I$  раз:  $k(t) \geq 0$  на отрезках  $[0, T_1], [T_2, T_3], \dots, [T_{2(I-1)}, T_{2I-1}]$  и  $k(t) < 0$  на интервалах  $(T_1, T_2), (T_3, T_4), \dots, (T_{2I-1}, T)$ , где  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{2I} = T$ . Точки  $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{2I-1}$  смены знака кривизны кривой  $\Gamma$  можно интерпретировать как точки перегиба (перехода от выпуклой к вогнутой части кривой  $\Gamma$ ). Обозначим  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2I}$  части кривой  $\Gamma$ , определяемые условиями  $(x(t), y(t)), T_{i-1} \leq t \leq T_i, 1 \leq i \leq 2I$ .

**Теорема 3.** Площадь полосы  $m\Gamma^h$  области  $mG$  удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}(m\Gamma^h) \leq mM, \quad (12)$$

$$M = \frac{7L^2}{18} + Lh + \frac{LK}{m} \left( \frac{7L}{18} + h \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) + \frac{7L^2}{9m^2}.$$

**Доказательство.** Выделим в полосе  $m\Gamma^h$  части  $m\Gamma_1^h, \dots, m\Gamma_{2I}^h$  и положим  $L(\Gamma_i) = L_i, i = 1, \dots, 2I$ . Разобьем кривую  $m\Gamma_i$  на  $n_i$  участков длины  $\sigma_i = mL_i / n_i$ , полагая  $\sigma_{2I+1} = \sigma_1$ ,

$$\min_{1 \leq i \leq 2I} n_i > \max_{1 \leq i \leq 2I} \max(3L_i K, m), i = 1, \dots, 2I, \quad (13)$$

и каждый участок замкнем отрезком. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{\sigma_i K}{m} < \frac{1}{3}, i = 1, \dots, 2I.$$

Рассмотрим участки  $m\Gamma_{2i-1}, i = 1, \dots, I$ , и присоединим к построенным отрезкам прямоугольники высоты  $h$ . Тогда по аналогии с (10) получаем неравенство

$$\operatorname{mes}(m\Gamma_{2i-1}^h) \leq mM'_{2i-1}, \quad (14)$$

$$M'_{2i-1} = \frac{7L_{2i-1}^2}{36} + L_{2i-1}h, i = 1, \dots, I.$$

Перейдем к случаю отрицательной кривизны, т. е. к участкам  $m\Gamma_{2i}, i = 1, \dots, I$ . Каждый участок кривой  $m\Gamma_{2i}$  длины  $\sigma_{2i}$  замкнут отрезком. Построим на каждом отрезке, как на основании, прямоугольник высоты  $\sigma_{2i} \operatorname{tg}(\sigma_{2i} K / m) + h$ , имеющий непустое пересечение с  $mG$  (рис. 5). Тогда площадь каждого построенного прямоугольника  $S_{2i} \leq \sigma_{2i} (\sigma_{2i} \operatorname{tg}(\sigma_{2i} K / m) + h)$ , а суммарная

площадь получившихся прямоугольников будет не превосходить  $mM'_{2i}$ , где

$$M'_{2i} = \frac{7L_{2i}^2}{18} + L_{2i}h, i = 1, \dots, I. \quad (15)$$

Однако между боковыми сторонами прямоугольников высоты  $\sigma_{2i} \operatorname{tg}(\sigma_{2i}K/m) + h$ , могут возникнуть пересекающиеся с  $mG$  круговые сектора (рис. 5).

Углы между сторонами соседних прямоугольников не превосходят  $2\sigma_{2i}K/m$ . Поэтому площадь кругового сектора  $S_{sec}$  удовлетворяет соотношению

$$S_{sec} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{2i} \operatorname{tg} \frac{\sigma_{2i}K}{m} + h \right)^2 \frac{2\sigma_{2i}K}{m} \leq \left( \frac{7\sigma_{2i}^2K}{6m} + h \right)^2 \frac{\sigma_{2i}K}{m}.$$

Суммарная площадь рассматриваемых круговых секторов не превосходит  $mM''_{2i}$ , где

$$M''_{2i} = \frac{L_{2i}K}{m} \left( \frac{7L_{2i}}{18} + h \right)^2, i = 1, \dots, I. \quad (16)$$

Рассмотрим круговые сектора между прямоугольниками на границе участков кривых  $m\Gamma_{2i-1}, m\Gamma_{2i}$  и на границе участков кривых  $m\Gamma_{2i}, m\Gamma_{2i+1}$  (рис. 6), полагая  $\sigma_{2i+1} = \sigma_1$ . Для этого увеличим высоту  $h$  прямоугольников на границе указанных кривых на величину  $\sigma_{2i} \operatorname{tg}(\sigma_{2i}K/m)$ . Заметим, что углы между сторонами построенных прямоугольников не больше  $\sigma_{2i}K/m$ . Оценим суммарную площадь получившихся секторов и добавленных прямоугольников:

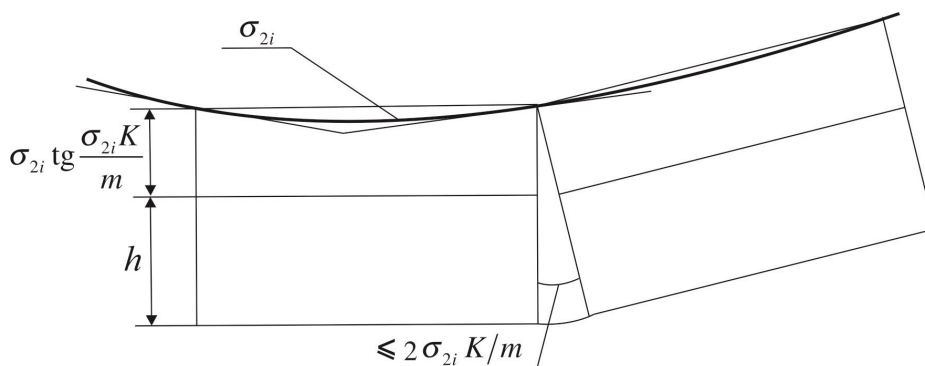


Рис. 5. Прямоугольник на участке кривой  $m\Gamma_{2i}$  длины  $\sigma_{2i}$  и круговой сектор между прямоугольниками на этом участке

Fig. 5. A rectangle on a section of the curve  $m\Gamma_{2i}$  with length  $\sigma_{2i}$  and a circular sector between the rectangles on this section

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \left[ \left( \sigma_{2i} \operatorname{tg} \frac{\sigma_{2i}K}{m} + h \right)^2 \frac{\sigma_{2i}K}{2m} + \sigma_{2i-1} \sigma_{2i} \operatorname{tg} \frac{\sigma_{2i}K}{m} \right] + \\ & + \sum_{i=1}^I \left[ \left( \sigma_{2i} \operatorname{tg} \frac{\sigma_{2i}K}{m} + h \right)^2 \frac{\sigma_{2i}K}{2m} + \sigma_{2i+1} \sigma_{2i} \operatorname{tg} \frac{\sigma_{2i}K}{m} \right] \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^I \left[ \left( \frac{7\sigma_{2i}^2K}{6m} + h \right)^2 \frac{\sigma_{2i}K}{m} + \frac{7\sigma_{2i}^2K}{6m} (\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i+1}) \right] \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^I \left[ \left( \frac{7\sigma_{2i}^2K}{6m} + h \right)^2 \frac{\sigma_{2i}K}{m} + \frac{7L_{2i}}{18m} (L_{2i-1} + L_{2i+1}) \right] \leq \\ & \leq m \left[ \frac{LK}{m^2} \left( \frac{7L}{18} + h \right)^2 + \frac{7L^2}{9m^2} \right] = mM'''. \quad (17) \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условий (13) из неравенств (14)–(17) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \operatorname{mes}(m\Gamma^h) \leq \\ & \leq m \left( \sum_{l=1}^I (M'_{2l-1} + M'_{2l}) + \sum_{l=1}^I M''_{2l} + M''' \right) \leq mM \quad (18) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты обеспечивают единичную вероятность обнаружения постороннего объекта при защите сетевой структуры при групповой стратегии, если самодвижущиеся аппараты перемещаются вдоль границы  $\Gamma$  на расстоянии обзора локатора между соседними аппаратами (по траектории движения) равном удвоенному радиусу обзо-

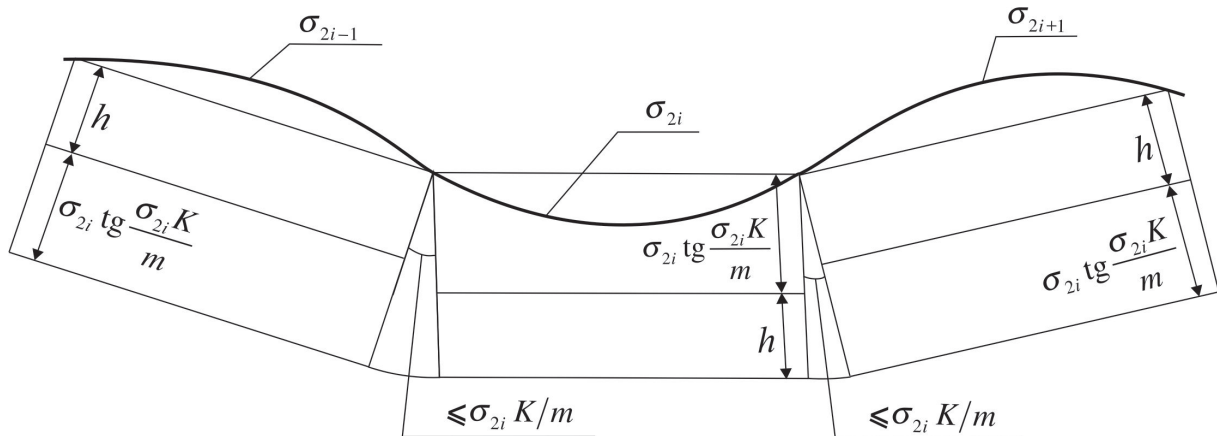


Рис. 6. Круговые сектора между прямоугольниками на границе участков  $m\Gamma_{2i-1}, m\Gamma_{2i}, m\Gamma_{2i+2}$   
 Fig. 6. Circular sectors between rectangles on the border of sections  $m\Gamma_{2i-1}, m\Gamma_{2i}, m\Gamma_{2i+2}$

ра. Минимальное число самодвижущихся аппаратов, требуемое для обнаружения постороннего объекта при защите сетевой структуры, для стратегии индивидуальной защиты превосходит аналогичное число при стратегии групповой защиты в число раз, пропорциональное линейному размеру области. Этот результат получен как для области, представляющей собой произвольный многоугольник, для выпуклой области и выпукло-вогнутой с ограниченной по модулю кривизной.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ДВО РАН «Дальний Восток» (проект № 15-I-4-047).

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herrero, M. A.* Cooperation, competition, organization: The dynamics of interacting living populations / M. A. Herrero, J. Soler // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 2015. – V. 25 – P. 2407–2415. DOI: 10.1142/S0218202515020030.
2. *Bellomo, N.* Traffic, crowds, and dynamics of self-organized particles: New trends and challenges / N. Bellomo, F. Brezzi // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 2016 – V. 25 – P. 395–400. DOI: 10.1142/S0218202515020017.

3. *Bellomo, N.* Mathematics, complexity and multiscale features of large systems of self-propelled particles / N. Bellomo, F. Brezzi // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 2016 – Vol. 25. – P. 207–214. DOI: 10.1142/S0218202510004702.
4. *Maslov, V. P.* Nonlinear Averages in Economics / V. P. Maslov // *Mathematical Notes.* – 2005. – V. 78, № 3–4. – P. 347–363. DOI: 10.4213/mzm2595.
5. *Monasterio, C. M.* First passages for a search by a swarm of independent random searchers / C. M. Monasterio, G. Oshanin, G. Schehr // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* – 2011. – V. 6. – P. 6–22. DOI: 10.1088/1742-5468/2011/06/P06022.
6. *Galceran, E.* A survey on coverage path planning for robotics / E. Galceran, M. Carreras // *Robotics and Autonomous Systems.* – 2013. – V. 61, № 12. – P. 1258–1276. DOI: 10.1016/j.robot.2013.09.004.
7. *Chung, T. H.* Search and pursuit-evasion in mobile robotics / T. H. Chung, G. A. Hollinger, V. Isler // *Autonomous Robots.* – 2011. – V. 31. – P. 299–316. DOI:10.1007/s10514-011-9241-4.
8. *Hazra, M. J.* Strategies for Searching Targets Using Mobile Sensors in Defense Scenarios / T. Hazra, M.J. Nene, C.R.S. Kumar // *International Journal of Systems, Control and Communications* – 2017 – V. 9, № 5 – P. 61–70. DOI: 10.5815/ijitcs.2017.05.08
9. *Hazra, T.* Modeling and analysis of grid-based target searching problems in a mobile sensor network / T. Hazra, C.R.S. Kumar, M. J. Nene // *Wireless Personal Communications.* – 2017. –

V. 95, № 4. – P. 4717–4732. DOI: 10.1007/s11277-017-4930-8.

10. *Hazra, T.* Multi-agent target searching with time constraints using game-theoretic approaches / T. Hazra, C.R.S. Kumar, M. J. Nene // *Kybernetes* – 2017 – V. 46, № 8 – P. 1278–1302. DOI: 10.1108/K-01-2017-0039.

11. *Гузев, М. А.* Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта автономными необитаемыми подводными аппаратами как решение задачи Бюффона / М. А. Гузев [и др.] // *Дальневосточный математический журнал*. – 2017. – Т. 17. – С. 191–200.

12. *Гузев, М. А.* Защита сетевой структуры автономными аппаратами / М. А. Гузев, Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // *Дальневосточный математический журнал*. – 2018. – № 18. – С. 177–182.

13. *Guzev, M. A.* The object detection by autonomous apparatus as a solution of the Buffon needle problem / M. A. Guzev, G. Sh. Tsitsiashvi-

li, M. A. Osipova // *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*. – 2019. – № 7. – С. 189–201. DOI: 10.2140/memocs.2019.7.189.

14. *Hardy, G. H.* On the Expression of a Number as the Sum of Two Squares / G. H. Hardy. – 3-rd edition – New York: Chelsea, 1999.

15. *Hardy, G. H.* Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work / G. H. Hardy, S. I. Ramanujan // *J. Math.* – 1915. – V. 46 – P. 263–283.

16. *Huxley, M. N.* Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function / M. N. Huxley // *Number theory for the millennium*. – 2002. – № 11. – P. 275–290.

17. *Прасолов, В. В.* Теорема Жордана / В. В. Прасолов // *Математическое образование*. – 1999. – № 9–10. – С. 95–101.

18. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – В 3 т. – Т. 1. – М.: Физматлит, 2003.

**Цициашвили Гурами Шалвович** — д-р физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН.

E-mail: guram@iam.dvo.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2600-0474>

**Осипова Марина Анатольевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН.

E-mail: mao1975@list.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5615-9449>

**Заболотский Владимир Сергеевич** — старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета.

E-mail: zabolotskiy.vs@dvfu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5981-8697>



## MULTI-CRITERIA APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF FULLY CONNECTED TWO-FACTOR REGRESSIONS BASED ON THE MODELLING OF THE GDP OF RUSSIA

© 2020 G. Sh. Tsitsiashvili<sup>✉1</sup>, M. A. Osipova<sup>1,2</sup>, V. S. Zabolotskiy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Applied Mathematics FEB RAS  
7, Radio Street, 690041 Vladivostok, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University  
10, Ajax Bay, 690922 Russky Island, Russian Federation*

**Annotation.** This paper studies two strategies to protect bodies located in the nodes of a square lattice (the network structure of bodies) from extraneous objects. The focus is on the protection by self-moving devices that move along the border of the area where the network structure is located. This paper considers not only circular areas, but also areas of an arbitrary type, namely, areas with piecewise linear and convex-concave smooth borders. It was proved that the model with the group protection of bodies (devices move along the border of a large radius area) is more advantageous to the model with the individual protection of each body (devices move along a circle with a diameter equal to the grid step). It was shown that the ratio of the minimum number of devices used for the individual protection strategy to the minimum number of devices used for the group protection strategy is proportional to the linear dimension of the area. The obtained results are based on the parametrisation of the model by the linear dimension of the region, on the proof of asymptotic relations for regions with different borders, and on the idea of calculating the area of the inner band of the considered width regions equal to the length of the diagonal of the lattice square. In case of group strategy for protecting the network structures of bodies there is a single probability to detect an extraneous object if self-moving vehicles move along the border at the distance of the locator's field of vision between neighbouring vehicles (along the trajectory of movement) equal to a double radius of vision. This task arose due to the intensive study of structures generated by self-moving particles. The number of self-moving particles is assumed to be quite large, which causes certain difficulties in their technical implementation.

**Keywords:** individual protection, group protection, band area, square lattice, self-moving vehicles, curvature, convex-concave border.

### CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

### REFERENCES

1. Herrero, M. A., Soler J. Cooperation, competition, organization: The dynamics of interacting living populations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2015. V. 25. P. 2407–2415. 10.1142/S0218202515020030

2. Bellomo N., Brezzi F. Traffic, crowds, and dynamics of self-organized particles: New trends and challenges. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2016. V. 25. P. 395–400.

3. Bellomo N., Brezzi F. Mathematics, complexity and multiscale features of large systems of self-propelled particles. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2016. Vol. 25. P. 207–214.

4. Maslov V. P. Nonlinear Averages in Economics. *Mathematical Notes.* 2005. V. 78, No 3–4. P. 347–363.

5. Monasterio C. M., Oshanin G., Schehr G. First passages for a search by a swarm of independent random searchers. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* 2011. V. 6. P. 6–22.

✉ Tsitsiashvili Gurami Sh.  
e-mail: guram@iam.dvo.ru

6. Galceran E., Carreras M. A survey on coverage path planning for robotics? Robotics and Autonomous Systems. 2013. V. 61, No 12. P. 1258–1276.
7. Chung T. H. Search and pursuit-evasion in mobile robotics. / T. H. Chung, Hollinger G. A., Isler V. Autonomous Robots. 2011. V. 31. P. 299–316.
8. Hazra T., Nene M. J., Kumar C.R.S. Strategies for Searching Targets Using Mobile Sensors in Defense Scenarios. International Journal of Systems, Control and Communications. 2017. V. 9, No 5. P. 61–70. DOI: 10.5815/ijitcs.2017.05.08
9. Hazra T., Kumar C.R.S., Nene M. J. Modeling and analysis of grid-based target searching problems in a mobile sensor network. Wireless Personal Communications. 2017. V. 95, No 4. P. 4717–4732.
10. Hazra T., Kumar C. R. S., Nene M. J. Multi-agent target searching with time constraints using game-theoretic approaches. Kybernetes. 2017. V. 46, No 8. P. 1278–1302.
11. Guzev M. A., Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., Sporishev M. S. Probability of detecting an extraneous mobile object by Autonomous unmanned underwater vehicles is as a solution of Buffon problem. Far Eastern Mathematical Journal. 2017. V. 17. No 2. P. 191–200.
12. Guzev M. A., Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M. A. Protection of the network structure by autonomous vehicles. Far Eastern Mathematical Journal. 2018. V. 18. No 2. P. 177–182.
13. Guzev M. A., Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A. The object detection by autonomous apparatus as a solution of the Buffon needle problem. Mathematics and Mechanics of Complex Systems. 2019. No 7. P. 189–201.
14. Hardy G. H. On the Expression of a Number as the Sum of Two Squares. 3-rd edition. New York: Chelsea, 1999.
15. Hardy G. H., Ramanujan S. I. Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work. J. Math. 1915. V. 46. P. 263–283.
16. Huxley M. N. Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function. Number theory for the millennium. 2002. No 11. P. 275–290.
17. Prasolov, V. V. Theorem of Jordan. Mathematical education. 1999. No. 9–10. P. 95–101. (In Russian).
18. Fichtenholz G. M. Course of differential and integral calculus. In 3 t. T. 1. Moscow : Fizmatlit, 2003.

**Tsitsiashvili Gurami Sh.** — DSc in Physics and Mathematics, Professor, head research fellow, Institute of Applied Mathematics of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences.

E-mail: guram@iam.dvo.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2600-0474>

**Osipova Marina A.** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry, and Analysis, Far Eastern Federal University, researcher, Institute of Applied Mathematics of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences.

E-mail: mao1975@list.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5615-9449>

**Zabolotskiy Vladimir S.** — senior lecturer, Department of Algebra, Geometry, and Analysis, Far Eastern Federal University.

E-mail: zabolotskiy.vs@dvfu.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5981-8697>