

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ БОУКА — ВЕНА

© 2021 Т. Ю. Заблоцкая✉

*Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСиС»  
м-н Макаренко, 42, 309516 Старый Оскол, Российская Федерация  
Старооскольский филиал научно-исследовательского университета  
«Белгородский государственный университет»  
м-н Солнечный, 18, 309502 Старый Оскол, Российская Федерация*

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема идентификации параметров феноменологической модели Боука — Вена, описывающей работу широкого круга нелинейных систем с гистерезисом при помощи дифференциальных уравнений. Параметры классической модели Боука — Вена анализируются с точки зрения их влияния на форму петли гистерезиса. Приводится классификация диссипативности модели в зависимости от диапазона значений параметров. Дается аналитическое описание входного сигнала, исходя из задачи использования модели Боука — Вена в качестве гистерезисного преобразователя, встроенного в искусственную нейронную сеть на базе биологического нейрона. Описывается процедура определения параметров нормализованной модели, основанная на идентификации предельного цикла в уравнениях, описывающих петлю гистерезиса. Анализируется соответствие между параметрами исходной и нормализованной моделей Боука — Вена, а также влияние каждого из параметров в отдельности на форму гистерезисной кривой. Получены аналитические зависимости, определяющие параметры нормализованной модели на основе анализа входно-выходных соответствий модели Боука — Вена. Предложен алгоритм вычисления параметров Боука — Вена. Теоретические выкладки иллюстрируются результатами вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** гистерезис, модель Боука — Вена, предельный цикл, нормализованная модель, идентификация параметров.

### ВВЕДЕНИЕ

Явление гистерезиса присуще широкому кругу явлений. Примеры систем с гистерезисными свойствами встречаются в самых разных отраслях: электротехнике, электронике, оптике, биологии, экономике и других сферах [1, 2]. При этом под гистерезисной зависимостью понимают такое соотношение между входом и выходом, которое определяется не

только входным состоянием, но также зависит от предыстории самой системы.

Математические модели, описывающие нелинейные зависимости гистерезисного типа, можно разделить на два класса: конструктивные модели, базирующиеся на строгих физических принципах, и феноменологические, позволяющие адекватно описать широкий круг процессов без привязки к физике моделируемых явлений. К известным конструктивным моделям, нашедшим широкое применение, можно отнести модель Дюгема [3], модель Ишлинского [4, 5], пред-

---

✉ Заблоцкая Татьяна Юрьевна  
e-mail: [zablotskaja\\_t@mail.ru](mailto:zablotskaja_t@mail.ru)



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

ставляющую собой континуальный аналог семейства упоров, соединенных параллельно, модель Прейзаха [6], описывающую гистерезис в ферромагнетиках как сеть независимых доменов, каждый из которых обладает своей гистерезисной петлей, модель Красносельского — Покровского [7], в основе которой лежат преобразователи с пространствами состояний вход-выход (гистероны). Среди феноменологических моделей наибольшую популярность получили модель Даля [8] и модель Боука — Вена [9], обладающие гибкостью за счет возможности параметрического регулирования. Модель Даля может быть описана меньшим числом параметров, что упрощает ее настройку, однако сужает диапазон гистерезисных режимов.

Модель Боука — Вена позволяет охарактеризовать аналитически поведение нелинейной системы с гистерезисными свойствами при различных режимах ее функционирования. Универсальность модели достигается за счет вариативности ее параметров, что делает их идентификацию первоочередной задачей, обеспечивающей точность работы модели. Для ее решения на практике чаще всего применяют метод обратного поиска — когда по экспериментально полученным значениям входа и выхода настраивают параметры модели так, чтобы модель соответствовала требуемому режиму работы. После настройки модели на определенный тип входного сигнала проверяют ее отклик на входные воздействия других типов, максимально приближенные к реальным сигналам, после чего модель можно использовать для описания различных процессов или систем при условии, что их параметры будут находиться в пределах протестированных входных и выходных характеристик модели.

К методам идентификации параметров модели Боука — Вена, основанным на экспериментальных данных при периодическом воздействии на систему, можно отнести, например, итерационный подход для систем со сглаженной кривой гистерезиса [10], эволюционные алгоритмы [11], генетические алгоритмы для систем с нелинейной деградацией свойств [12], оптимизационные методы [13] и

др. Настройки параметров модели, полученные эмпирически, можно использовать для прогнозирования поведения физических систем с гистерезисом.

Для более гибкой настройки параметров используют методы Монте-Карло с цепями Маркова, нейронные сети и другие технологии [14]. При этом приемлемым методом настройки параметров считается такой, который приводит к минимальным погрешностям между данными модели и экспериментальными данными реальной системы.

В настоящей работе рассматривается метод аналитической идентификации параметров модели Боука — Вена с использованием предельного цикла гистерезиса, который позволяет добиться адекватного поведения модели при заданном входном сигнале без предварительной настройки.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Описание модели Боука — Вена

Модель Боука — Вена позволяет представить физическую систему с гистерезисом в системе координат  $x(t) \rightarrow F_R(x, t)$  и описать следующими соотношениями:

$$F_R(x, t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)Dkz(t); \quad (1)$$

$$\dot{z} = D^{-1}(A\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n), \quad (2)$$

где параметры  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  определяют форму петли гистерезиса,  $n$  — целочисленный параметр (в настоящей работе),  $n \geq 1$ ,  $D > 0$ ,  $k > 0$  и  $0 < \alpha < 1$ ,  $\dot{x} = \dot{x}(t)$  — производная по времени сигнала, поступающего на вход модели,  $F_R(x, t)$  — изменяющаяся во времени выходная переменная.

Уравнения (1)–(2) представляют собой модель Боука — Вена, которая изначально использовалась для описания гистерезиса в механических системах (где  $x$  — перемещение,  $F_R$  — возвращающая сила) и описывала упруго-пластический гистерезис  $F_R(x, t)$  как суперпозицию упругой составляющей  $\alpha kx$  и гистерезисной составляющей  $(1 - \alpha)Dkz(t)$ . Здесь  $D > 0$  соответствует пластической деформации смещения,  $0 < \alpha < 1$  — относительной жесткости (отношение деформации за преде-

лами упругости к деформации ниже предела упругости). Гистерезисная составляющая включает безразмерную переменную  $z$ , являющуюся решением нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. При этом предполагается выполнение условия:

$$\max_{t \geq 0} |x(t)| \leq \frac{(1-\alpha)Dz_0}{\alpha},$$

где левая часть характеризует максимальное значение входного сигнала на временном интервале  $t \geq 1$ .

Как следует из уравнений (1)–(2), модель Боука — Вена содержит семь параметров для описания системы с гистерезисными свойствами. В уравнении (2) величины  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — безразмерные и отвечают за форму и величину петли гистерезиса,  $n$  — величина, задающая плавность перехода от упругой к пластической деформации. Влияние каждого из этих параметров было детально рассмотрено в [9]. Модель (1)–(2) является классической и может быть модифицирована за счет включения в нее компонентов, отвечающих за деградацию механических свойств материалов и диссипацию энергии.

## 1.2. Проблема идентификации параметров модели Боука — Вена

Проблема определения параметров модели Боука — Вена является наиболее сложной задачей при моделировании конкретной нелинейной системы, поскольку влияние каждого из параметров на форму петли гистерезиса является нелинейным и трудно прогнозируемым [9]. Поскольку от настройки параметров модели зависит ее точность, идентификация параметров представляет собой актуальную задачу, требующую первоочередного решения. В прикладных задачах в области электромагнетизма и механики эту проблему решают от обратного — параметры модели оценивают с помощью полученных эмпирических данных, по которым строят кривую на основе сравнения экспериментальных данных или устанавливают зависимость между влиянием возмущающих воздействий различной природы и откликом системы

[15, 16]. Другим подходом к определению параметров модели является разбивка всех возможных значений рассматриваемого параметра на узкие диапазоны с последующим определением наборов коэффициентов. Фактически данный метод представляет собой метод проб и ошибок, требующий многократных повторений, и применим только тогда, когда значения параметров модели представляют собой ограниченное множество. Анализ подходов к нахождению значений параметров модели Боука — Вена позволяет сделать вывод о том, что на данный момент нет четкой методики определения всех параметров модели. Обзор методов идентификации с помощью параметрических и непараметрических методов приведен в [17], и большая часть из них базируется на результатах численного моделирования без строгого математического оценивания степени приближения расчетных данных к истинным значениям. Таким образом, целью данной работы является поиск математически обоснованного метода идентификации параметров модели Боука — Вена, который будет удовлетворять условиям гибкости и обеспечит высокую точность настройки модели.

Рассмотрим модель, на вход которой подается периодический сигнал, которому, в свою очередь, соответствует асимптотически периодический выходной сигнал с таким же периодом. Предельный цикл гистерезисной характеристики можно использовать для определения параметров модели Боука — Вена. Для этого необходимо решить следующие задачи:

1) доказать аналитически, что реакция модели Боука — Вена на серию периодических импульсов приводит асимптотически к периодическому выходному сигналу;

2) описать полученный предельный цикл гистерезиса аналитически; задача математического описания предельных циклов нелинейных систем остается, по большому счету, открытой, хотя существуют приближенные методы (например, метод гармонического баланса); последние используют данные о геометрии фазового пространства моделируемого процесса, модель Боука — Вена этого не требует;



$$z_0 = \sqrt[n]{\frac{A}{\beta + \gamma}}; \quad z_1 = \sqrt[n]{\frac{A}{\beta - \gamma}}. \quad (3)$$

Проанализируем поведение модели при различных соотношениях между  $\beta$  и  $\gamma$ . В работе [9] показано, что соответствие между этими двумя параметрами влияет на форму петли гистерезиса гораздо сильнее, чем абсолютная величина каждого из них в отдельности. Также показана возможность сведения параметров классической модели Боука — Вена к четырем настраиваемым параметрам  $(A, \beta, \gamma, n)$ . Таким образом, как показано в [22], можно выделить два класса моделей Боука — Вена, которые обладают свойством ограниченного входа/выхода и приводят к единственному решению уравнений (1)–(2):

$$\text{I класс: при } \begin{cases} \beta + \gamma > 0 \\ \beta - \gamma \geq 0 \end{cases};$$

$$|z(t)_{\max}| = \max(|z(0)|, z_0);$$

$$\text{II класс: при } \begin{cases} \beta - \gamma < 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases};$$

$$|z(t)_{\max}| = \max(|z(0)|, z_0).$$

Для обоих классов моделей начальные условия  $z(0)$  задаются на множестве  $[-z_1, z_1]$ , при этом решение уравнения (2) ограничено сверху. Для обоих классов моделей параметр  $\beta$  неотрицательный, и, поскольку для реальных гистерезисных систем выполняются законы термодинамики, то справедливы следующие параметрические ограничения, обусловленные диссипативностью системы с гистерезисом:  $n > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $-\beta \leq \gamma \leq \beta$ ; при  $0 < n \leq 1$  решение может быть не единственным [13].

Другие варианты значений параметров  $\beta$  и  $\gamma$  приводят к новым классам моделей, которые, однако, не получили практического применения при описании реальных систем с гистерезисом. При этом реальным физическим процессам и диссипативности в большей степени соответствует только первый класс моделей. Отметим, что модель Боука — Вена этого класса хорошо согласуется с реальными данными для входного сигнала, описанного выше (рис. 1). Если для параметров модели

выполняются следующие условия:  $n \geq 1$ ,  $D > 0$ ,  $A > 0$ ,  $\beta + \gamma > 0$ ,  $\beta - \gamma \geq 0$ , то флуктуации входного сигнала не влияют существенно на качество модели. При этом существует большое число вариаций значений параметров модели, приводящих к одинаковому отклику на одно и то же входное воздействие.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

#### 3.1. Нормализованная модель Боука — Вена

Рассмотрим модели Боука — Вена обоих классов, описанные уравнениями (1)–(2), для которых положим  $n_2 = n_1 = n$ ,  $A_2 = A_1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1$ ,  $k_2 = k_1$ ,  $\beta_2 = v^n \beta_1$ ,  $\gamma_2 = v^n \gamma_1$ ,  $D_2 = vD_1$ , где  $v = \text{const}$ ,  $v > 0$ . При начальных условиях  $z_2(0) = z_1(0) = 0$  обе модели будут принадлежать одному классу, где входному воздействию  $x(t)$  соответствует выходной сигнал  $F_R(t)$ , т. е.,  $F_{R2}(x)(t) = F_{R1}(x)(t)$  для любых  $t > 0$ . Таким образом, взаимодействие входного и выходного сигналов моделей не описывается уникальным набором параметров  $\Psi_{A, \beta, \gamma, \alpha, k, D, n}$ , и параметры нельзя определить путем сопоставления входа и выхода модели. В этом случае целесообразно перейти к нормализованной модели Боука — Вена [23], выполнив преобразование:

$$\omega(t) = \frac{z(t)}{z_0}. \quad (4)$$

Тогда уравнения (1)–(2) можно записать в виде:

$$F_R(x, t) = k_x x(t) + k_\omega \omega(t), \quad (5)$$

$$\dot{\omega}(t) = \rho(\dot{x} - \sigma |\dot{x}(t)| |\omega(t)|^{n-1} \omega(t) + (\sigma - 1)\dot{x}(t) |\omega(t)|^n), \quad (6)$$

где

$$\rho = \frac{A}{Dz_0} > 0, \quad \sigma = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \geq 0, \quad k_x = \alpha k > 0, \quad k_\omega = (1 - \alpha)Dkz_0 > 0. \quad (7)$$

Уравнения (5)–(6) представляют собой нормализованную модель Боука — Вена, а выражения (7) описывают ее параметры, выраженные через параметры исходной классической модели. При начальных условиях  $|\omega(0)| \leq 1$  для любых неотрицательных значений  $t$  справедливо соотношение  $|\omega(t)| \leq 1$ , и

переменная  $z(t)$  может быть ограничена. Таким образом, нормализованная модель Боука — Вена однозначно определяет зависимость между входным и выходным сигналами модели и ее параметрами. Модель (5)–(6) соответствует физической природе гистерезиса и адекватно описывает реальные физические системы при следующих значениях параметров (7):  $n \geq 1$ ,  $\rho > 0$ ,  $\sigma \geq 1/2$ ,  $k_x > 0$ ,  $k_w > 0$  и  $\max_{t \geq 0} (x(t)) \leq \frac{k_x}{k_w}$ .

При периодическом входном сигнале, которому соответствуют временные промежутки возрастания и убывания (нагрузки и релаксации), выход модели будет асимптотически приближаться к периодическому входному воздействию того же периода и будет представлять собой полную замкнутую петлю гистерезиса. В контексте решаемой задачи будем рассматривать зависимость возвращающей силы (выхода) от смещения (входа). В этом случае входной сигнал  $x(t)$  можно рассматривать как непрерывную функцию на промежутке  $[0, \infty)$  с периодом  $T > 0$ .

В зависимости от значений параметров нормализованной модели получаем следующие условия (по классам моделей):

I класс: при  $\sigma \geq 1/2$   $\Psi_{\sigma, n} \in R$ ,  $|\omega(t)|_{\max}$  определяется из условия  $\max(|\omega(0)|, 1)$ ;

II класс: при  $0 \leq \sigma < 1/2$   $\Psi_{\sigma, n} \in [-\sigma_0, \sigma_0]$ ,  $|\omega(t)|_{\max}$  определяется из условия  $\max(|\omega(0)|, 1)$ , где  $\sigma_0 = (1 - 2\sigma)^{\frac{1}{n}}$ ,  $\omega(t_m) = \omega_m$  и  $\omega(t_m^+) = \omega_m^+$ .

Уравнение (6) может быть переписано в эквивалентной форме:

при  $\omega(t) \geq 0, \dot{x}(t) \geq 0 \Rightarrow$

$$\dot{\omega}(t) = \rho(1 - \omega(t)^n) \dot{x}(t);$$

при  $\omega(t) \leq 0, \dot{x}(t) \geq 0 \Rightarrow$

$$\dot{\omega}(t) = \rho(1 + (2\sigma - 1)(-\omega(t)^n) \dot{x}(t);$$

при  $\omega(t) \geq 0, \dot{x}(t) \leq 0 \Rightarrow$

$$\dot{\omega}(t) = \rho(1 + (2\sigma - 1)\omega(t)^n) \dot{x}(t);$$

при  $\omega(t) \leq 0, \dot{x}(t) \leq 0 \Rightarrow$

$$\dot{\omega}(t) = \rho(1 - (-\omega(t))^n) \dot{x}(t).$$

Докажем, что при  $t \geq 0$  будет выполняться неравенство  $-1 < \omega(t) < 1$ . Положим  $\sigma = 0$  и запишем уравнение (6) в виде:

$$\dot{\omega}(t) = \rho(1 - |\omega(t)|^n) \dot{x}(t). \quad (8)$$

Обозначим производную выходного сигнала как  $u = \dot{x}(t)$  и введем функцию  $\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = \int_0^\omega \frac{du}{1 - |u|^n}. \quad (9)$$

Тогда при  $-1 \leq \omega(t) \leq 1$  функция  $\varphi$  есть биекция интервала  $(-1; 1)$  на множестве  $R$ . Определим  $\psi(\omega)$  как обратную  $\varphi(\omega)$  функцию. Тогда

$$\omega(t) = \psi(\rho x(t) + C), \quad (10)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Пусть для периодического входного сигнала  $x_{\min} = -x_{\max}$ . Тогда входной сигнал нормализованной модели Боука — Вена можно записать как:

$$\bar{x}(t) = \frac{x(t)}{x_{\max}}, \quad (11)$$

при этом  $-1 \leq \bar{x} \leq 1$ .

Определим функции  $\omega_m$  и  $F_m$  для  $m$ -го интервала как:

$$\omega_m(\tau) = \omega(mT + \tau); \quad (12)$$

$$F_m(\tau) = k_x x(\tau) + k_w \omega m(\tau), \quad (13)$$

$\tau \in [0; T]$ ,  $t = mT + \tau$ . Тогда уравнение (5) примет вид ( $\tau \in [0; T]$ ):

$$\bar{F}_R(\tau) = k_x x(\tau) + k_w \omega(\tau). \quad (14)$$

Из (12) следует, что при возрастании входного сигнала ( $\tau \in [0; T^+]$ ):

$$\bar{\omega}(\tau) = \psi^+ \left[ \varphi^+(-\psi(\rho(\delta_{\max} - x_{\min}))) \right] + \rho(x(\tau) - x_{\min}) \quad (15)$$

и при убывании входного сигнала ( $\tau \in [T^+, T]$ ):

$$\bar{\omega}(\tau) = -\psi^+ \left[ \varphi^+(-\psi(\rho(\delta_{\max} - x_{\min}))) \right] - \rho(x(\tau) - x_{\min}). \quad (16)$$

Здесь  $\varphi^+(\omega) = \int_0^\omega \frac{du}{1 - \sigma |u|^{n-1} u + (\sigma - 1) |u|^n}$ ;

$$\varphi^-(\omega) = \int_0^\omega \frac{du}{1 + \sigma |u|^{n-1} u + (\sigma - 1) |u|^n};$$

$\psi^+$  и  $\psi^-$  — обратные им функции;  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ ;  $\rho$  — величина, обратная пределу упругости нелинейной компоненты модели (при  $D = 1$ ):

$$\rho = \frac{\delta}{2x_{\max}}; \quad \rho = \frac{A}{z_0}, \quad \delta = \rho(x_{\max} - x_{\min}) > 0.$$

Соотношения (15)–(16) описывают форму петли гистерезиса нормализованной модели Боука — Вена в предельном цикле. В любой момент времени  $\tau \in [0; T]$  нижняя и верхняя границы  $\omega(t)$  будут находиться в пределах

$$\begin{aligned} -1 < -\xi(\rho(x_{\max} - x_{\min})) \leq \omega(\tau) \leq \\ \leq \xi(\rho(x_{\max} - x_{\min})) < 1 \end{aligned} \quad (17)$$

и приближаться к своим предельным значениям слева и справа при  $\tau = 0$  и  $\tau = T^+$  соответственно.

Поскольку функции (12)–(13) сходятся равномерно с функциями (14)–(16), описывающими нормализованную модель Боука — Вена, то выходной сигнал модели  $F_R(x, t)$  асимптотически совпадает с периодическим сигналом (рис. 2, а) и определяют для заданного входного сигнала устойчивый предельный цикл (рис. 2, б).

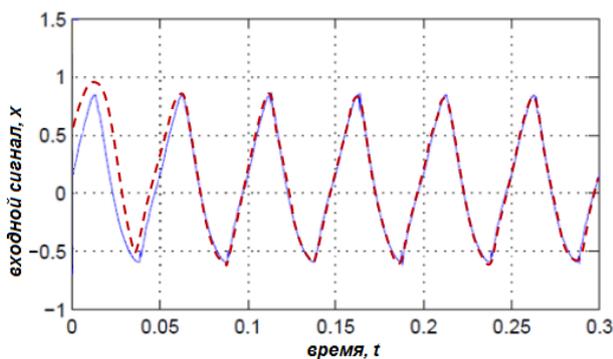
### 3.2. Предельный цикл модели Боука — Вена

Для периодического входного сигнала  $x(t)$  и асимптотически периодического выходного сигнала предельный цикл модели Боука — Вена можно разделить на четыре зоны, в зависимости от знака производной  $\dot{x}(t)$ : условно линейную зону, зону пластичности и переходные зоны в начале и в конце участков возрастания и убывания соответственно (рис. 3). Полагая эти режимы симметричными, далее

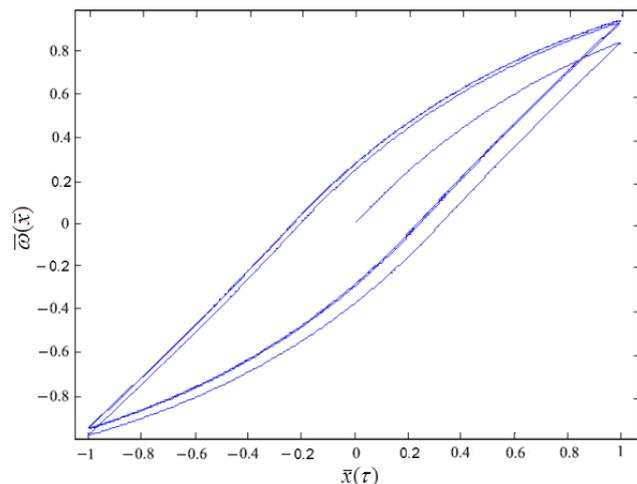
будем рассматривать только режим возрастания (нагружения). Для нормализованной модели значения входного и выходного сигналов находятся в области  $[-1; 1]$ .

Согласно уравнениям (15)–(16), основными параметрами нормализованной модели Боука — Вена являются  $\sigma$ ,  $\delta$  (или  $\rho$ ), и  $n$ ; их смысл применительно к гистерезисной кривой следующий:  $\rho$  — задает угол наклона линейной части петли при  $x_{\max} = 1$  и является обратной величиной к пределу упругости нелинейной части модели;  $\delta$  — определяет степень пластичности модели;  $\sigma$  — характеризует степень мягкости или жесткости характеристики гистерезисной части модели. Параметр  $n$ , как и в классической модели, определяет плавность перехода между зонами упругой и пластической деформации кривой гистерезиса. Параметры классической модели Боука — Вена были рассмотрены ранее в работе [9]. Чтобы определить, как параметры нормализованной модели ( $\sigma$ ,  $\delta$  и  $n$ ) влияют на форму петли гистерезиса в предельном цикле (рис. 3), необходимо:

1) изучить влияние каждого из параметров в отдельности на характер кривой  $\bar{\omega}(\bar{x})$  при фиксированном значении других параметров и определить, как изменится положение произвольно выбранной точки в переходной зоне кривой относительно оси ординат;



а)



б)

Рис. 2. Характеристики нормализованной модели Боука — Вена: а) входной сигнал (сплошная линия) и выход модели  $F_R(x)(t)$  (пунктир); б) отклик модели [Fig. 2. The normalized Bouc — Wen model characteristics: a) input (solid) and output  $F_R(x)(t)$  (dashed) signals; б) the model response]

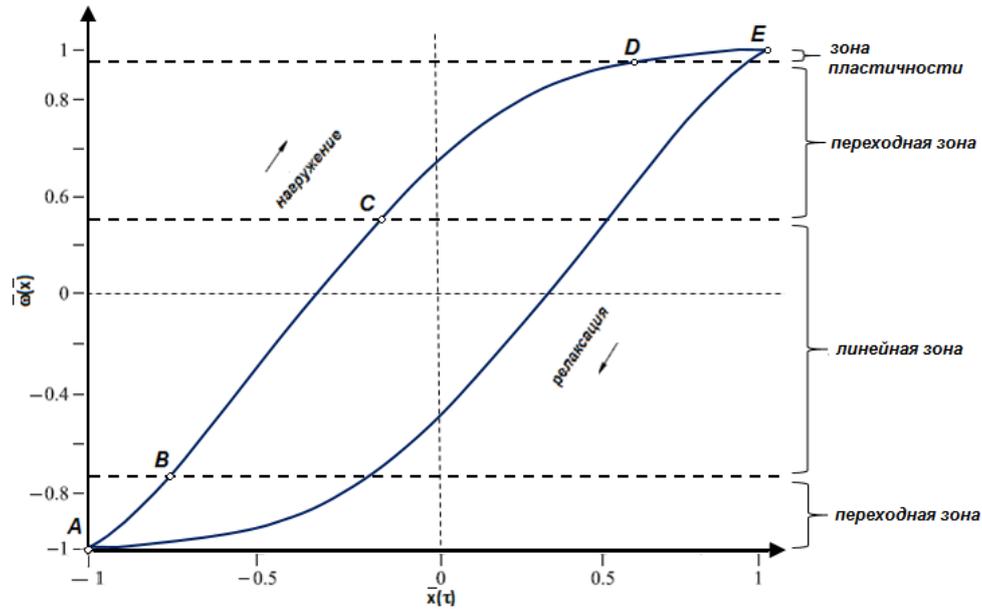


Рис. 3. Предельный цикл нормализованной модели Боука — Вена  
 [Fig. 3. Limit cycle of the normalized Bouc — Wen model]

2) определить, как значения параметров модели повлияют на положение точки, в которой значение выходного сигнала  $\bar{w}(\bar{x}) = 0$ , и, соответственно, на ширину петли гистерезиса;

3) определить границы кривой гистерезиса при различных значениях параметров модели в четырех зонах: переходной зоне АВ, линейной зоне ВС, переходной зоне CD, зоне деформации DE.

Преимуществом нормализованной модели по отношению к стандартной является то, что размер петли четко ограничен значением выходной характеристики  $\bar{w}(\bar{x})$ . При этом значению нормализованного входного сигнала  $x_{\max}$  или  $\bar{x}(T^+) = 1$  соответствует максимум выходного сигнала  $\bar{w}(1) = \psi_{\sigma,n}(\delta) = \psi_{\sigma,n}^+$ . Также к достоинствам нормализованной модели следует отнести то, что влияние параметров на форму и размер петли гистерезиса можно определить аналитически.

Свойства нормализованной модели Боука — Вена при изменении ее параметров  $\sigma$ ,  $\delta$  и  $n$  представлены в табл. 1. Связь между входом и выходом нормализованной модели определяется соотношениями:

$$\frac{d\bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{\delta}{2}(1 - \bar{w}(\bar{x})^n) \quad (18)$$

при  $\bar{w}(\bar{x}) \geq 0$ ;

$$\frac{d\bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{\delta}{2}(1 + (2\sigma - 1)(-\bar{w}(\bar{x})^n)) \quad (19)$$

при  $\bar{w}(\bar{x}) \leq 0$ .

Поведение нормализованной модели при линейной зависимости входа и выхода (на участке монотонности) определяется знаком производной (18)–(19), которая всегда положительна, поскольку выход модели находится в диапазоне  $-1 < \bar{w}(\bar{x}) < 1$  для любых значений входного сигнала в пределах  $-1 \leq \bar{x} \leq 1$  и значений параметров  $\sigma > 1/2$  и  $\delta > 0$ .

Значение производной максимально в линейной части предельного цикла и гораздо меньше в зоне деформации (рис. 3). Производная (18)–(19) содержит:

- линейную составляющую  $\delta/2$ ;
- нелинейную составляющую:  
 $-\frac{\delta}{2}\bar{w}(\bar{x})^n$  при  $\bar{w}(\bar{x}) \geq 0$  и  $\frac{\delta}{2}(2\sigma - 1)(-\bar{w}(\bar{x})^n)$  при  $\bar{w}(\bar{x}) \leq 0$ .

Эти компоненты определяют соответственно линейный или нелинейный вклад в поведение нормализованной модели. Влияние нелинейной компоненты незначительно при малых значениях  $\bar{w}(\bar{x})$ , когда угол наклона кривой гистерезиса определяется равенством:

$$\left[ \frac{d\bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right]_{\bar{w}=0} = \frac{\delta}{2}. \quad (20)$$

Таблица 1. Выход  $\bar{\omega}(\bar{x})$  нормализованной модели Боука — Вена при различных значениях параметров

[Table 1. Output signal  $\bar{\omega}(\bar{x})$  of the normalized Bouc — Wen model for varying parameter values]

Значение параметра (const)	Значение выхода модели при изменяемом параметре (var)		
	$\bar{x}_0 = var$		
	-1	$-1 < \bar{x}_0 < 1$	$\geq 1$
$\delta = 0$	0	0	0
$\delta = \delta^*$	↓	↓	↑
$\delta = +\infty$	-1	↑ 1	1
	$< \frac{2}{\delta} \psi_{\sigma,n}(\delta) - 1$		$\geq \frac{2}{\delta} \psi_{\sigma,n}(\delta) - 1$
$\sigma = 1/2$	$\bar{\omega}(\bar{x})_{\sigma=1/2}$		$\bar{\omega}(\bar{x})_{\sigma=1/2}$
			↑
$\sigma = +\infty$	$\psi_n^+ \left( \frac{\delta}{2}(\bar{x}) + 1 \right)$		$\psi_n^+ \left( \frac{\delta}{2}(\bar{x}) + 1 \right)$
	$\delta \in (0; 2]$		$\delta > 2$
$n = 1$	$\bar{\omega}(\bar{x})_{n=1}$		$\bar{\omega}(\bar{x})_{n=1}$
$n = +\infty$	$\frac{\delta}{2}(\bar{x})$		$\begin{cases} -1 + \frac{\delta}{2}(\bar{x} + 1), & \text{если } -1 \leq \bar{x} \leq \frac{4}{\delta} - 1 \\ 1, & \text{если } \frac{4}{\delta} - 1 \leq \bar{x} \leq 1 \end{cases}$

Из уравнений (14)–(16) следует, что минимального значения функция выхода  $\bar{\omega}(\bar{x})$  достигает при  $\bar{x} = -1$ :  $\bar{\omega}(-1) = -\psi_{\sigma,n}(\delta)$ ; наибольшее значение выхода достигается при  $\bar{x} = 1$ :  $\bar{\omega}(1) = \psi_{\sigma,n}(\delta)$ .

Функция  $\psi_{\sigma,n}$  как  $\psi_{\sigma,n}(\delta)$  возрастает с ростом параметра  $\delta$  и является ограниченной:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \psi_{\sigma,n}(\delta) = 1,$$

а выход нормализованной модели  $\bar{\omega}(\bar{x})$  имеет глобальный минимум при  $\delta^* = \varphi_{\sigma,n} \left( \sqrt[n]{\frac{-\bar{x}}{\sigma(\bar{x}+1) - \bar{x}}} \right)$ ; если положить  $\bar{x} = -0,5$ , то  $\delta^* = 0,16(6)$ .

Для некоторых значений параметров характер монотонности кривой  $\bar{\omega}(\bar{x})$  невозможно определить. Так, например, при значениях параметра  $\sigma \in (1/2; \sigma^*]$ , где  $\sigma^* > 1/2$  и

определяется из (15)–(16), наблюдается минимум выходного сигнала  $\bar{\omega}(\bar{x})$  и характер монотонности выхода определить затруднительно [19].

В диапазоне значений параметра  $\sigma \in (\sigma^*; \infty)$  производная  $\frac{\partial \psi_{\sigma,n}(\delta)}{\partial \sigma} > 0$ , что соответствует возрастанию функции  $\psi_{\sigma,n}$  с ростом  $\sigma$ :

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \psi_{\sigma,n}(\delta) = \psi_n^+(\delta).$$

Таким образом, выход модели возрастает с увеличением параметра  $\sigma$ .

Рассмотрим выход модели при переменном значении параметра  $n$  для двух диапазонов значений параметра  $\delta$ : при  $\delta \in (0; 2]$  с ростом параметра  $n$  имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\sigma,n}(\delta) = \frac{\delta}{2};$$

при  $\delta > 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\sigma, n}(\delta) = 1.$$

Анализ влияния параметров нормализованной модели Боука — Вена на выход модели позволяет выяснить геометрическое положение точек графика, определяющих условно линейную зону (рис. 3). Координаты точек В ( $\bar{x}_B$ ;  $\bar{\omega}_B$ ) и С ( $\bar{x}_C$ ;  $\bar{\omega}_C$ ) задают ширину линейной зоны и ее положение (сдвиг вверх/вниз по оси ординат). В зоне деформации значительные изменения входного сигнала приводят к малым изменениям выхода (что соответствует гораздо меньшему значению производной  $\frac{d\bar{\omega}(\bar{x})}{d\bar{x}}$  по сравнению с линейной зоной).

Координаты границ линейной зоны можно определить из соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_B &= -n\sqrt{\frac{l_1}{2\sigma-1}}; \\ \bar{\omega}_C &= \sqrt{l_1}; \\ \bar{\omega}(\bar{x}_B) &= \bar{\omega}_B; \\ \bar{\omega}(\bar{x}_C) &= \bar{\omega}_C, \end{aligned}$$

где  $0 < l_1 < 1$  показывает максимально возможное отношение между значением производной в любой точке линейного участка кривой предельного цикла и значением  $\delta/2$  согласно (20).

Зона деформации имеет границы  $(-1 + \frac{2}{\delta}\varphi_n^+ \cdot \sqrt{1-l_2}; \sqrt{1-l_2})$  снизу и  $(1; \psi_n^+(\delta))$  сверху, где  $0 < l_2 < 1$  определяет максимально возможное отношение между значением производной в любой точке зоны деформации и тангенсом угла наклона кривой в линейной зоне. При  $\delta > 2$  нижняя и верхняя границы имеют координаты соответственно  $(\frac{4}{\delta}-1; 1)$  и  $(-1; 1)$ .

### 3.3. Аналитическое определение параметров модели Боука — Вена

В отличие от численных методов, используемых для идентификации параметров модели при решении конкретных задач, аналитический метод идентификации позволяет выявить общие закономерности зависимости гистерезисной кривой при изменении пара-

метров модели и составить алгоритм для их нахождения. Для нормализованной модели Боука — Вена (5)–(6) необходимо определить основные параметры:  $k_x$ ,  $k_w$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  (или  $\rho$ ) и  $n$ . Используя зависимости и описания, полученные для предельного цикла гистерезиса нормализованной модели Боука — Вена в предыдущих разделах, процесс идентификации параметров модели можно записать в виде следующего алгоритма:

1. На вход модели подается периодический сигнал  $x(t)$ , которому, после некоторого переходного процесса, соответствует выход модели  $\bar{F}_R(t)$ .

2. На вход модели подается периодический сигнал  $x_1(t) = x(t) + \lambda$ , постоянная  $\lambda = \text{const}$ , отличная от нуля, выбирается из условия, что входному сигналу  $x_1(t) = x(t) + \lambda$  соответствует выходной  $\bar{F}_{R1}(t)$ . Параметры обоих сигналов и зависимость между ними будем считать известными.

3. Учитывая, что  $\bar{F}_{R1}(x_1) = \bar{F}_R(x) + k_x \lambda$  в линейной зоне, можно определить коэффициент  $k_x$  для любых  $x \in [x_{\min}; x_{\max}]$ :

$$k_x = \frac{\bar{F}_{R1}(x + \lambda) - \bar{F}_R(x)}{\lambda}.$$

4. Введем функцию  $\theta(t)$ , определив ее как  $k_w \bar{\omega}(x) = \bar{F}_R(x) - k_x x \cong \theta(x)$ , а также параметры  $a$  и  $b$ , связанные соотношением:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = a - b\theta(x)^n, \text{ где } \theta(t) \geq 0,$$

откуда

$$a = \rho k_w; \quad b = \rho k_w^{-n+1}.$$

5. Параметр  $a$  можно определить из условия  $\theta(x_0) = 0$  при  $x = x_0$ :

$$a = \frac{d\theta(x)}{dx}.$$

При этом единственность решения для нулей функции  $\theta(t)$  является следствием возрастания функции  $\bar{\omega}(\bar{x})$  на промежутке  $[x_{\min}; x_{\max}]$  и перехода функции из отрицательной области в положительную через ось  $Ox$ .

6. Определим константы  $x_1$  и  $x_2$ , такие, чтобы выполнялись условия  $x_2 > x_1 > x_0$ . Тогда параметры модели  $n$  и  $b$  можно вычислить по формулам:

$$n = \frac{\ln \left( \frac{\left( \frac{d\theta(x)}{dx} \right)_{x=x_2} - a}{\left( \frac{d\theta(x)}{dx} \right)_{x=x_1} - a} \right)}{\ln \frac{\theta(x_2)}{\theta(x_1)}}; \quad b = \frac{a - \left( \frac{d\theta(x)}{dx} \right)_{x=x_2}}{\theta(x_2)^n}.$$

7. Параметры  $k_w$  и  $\rho$  определяются соотношениями:

$$k_w = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \rho = \frac{a}{k_w}.$$

8. С учетом п. 4 и п. 7, функцию  $\bar{\omega}(x)$  можно записать как

$$\bar{\omega}(x) = \frac{\theta(x)}{k_w}.$$

9. Выбрав константу  $x_3$  так, чтобы выполнялось условие  $x_3 < x_0$  и  $\bar{\omega}(x_3) < 0$ , и с учетом (7)–(8) для всех  $\bar{\omega}(x) \leq 0$ , уравнение (6) можно записать в виде:

$$\frac{d\bar{\omega}(x)}{dx} = \rho(1 + (2\sigma - 1)(-\bar{\omega}(x))^n).$$

Тогда параметр  $\sigma$ :

$$\sigma = 0,5 \left( \frac{\left( \frac{d\bar{\omega}(x)}{dx} \right)_{x=x_3} - 1}{\frac{\rho}{(-\bar{\omega}(x_3))^n} + 1} \right).$$

Представленный выше алгоритм позволяет вычислить значения параметров нормализованной модели Боука — Вена в случае идеальной нелинейной системы без учета внешних возмущений, при их наличии возникнет относительная погрешность между истинным значением параметра и его оценкой, которую также можно однозначно определить для известного периодического сигнала. Если же входной сигнал не является периодическим, то предельного цикла на выходе модели может не быть. Также, предельный цикл может не наблюдаться в случае периодического входного сигнала и непериодических возмущений. На практике в большинстве случаев параметры предельного цикла можно оценить экспериментально.

### 3.4. Пример

Пусть параметры нормализованной модели ( $n \geq 1$ ,  $\rho > 0$ ,  $\sigma \geq 1/2$ ,  $k_x > 0$ ,  $k_w > 0$ ) имеют следующие значения:  $n = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $k_x = 2$ ,  $k_w = 1,5$ .

Рассчитаем значения этих параметров модели согласно приведенному выше алгоритму и определим погрешность. Согласно алгоритму, описанному выше, входной сигнал должен быть периодическим. В реальных системах входной сигнал можно представить в виде суммы полезного периодического сигнала  $x(t)$  и сигнала помехи  $d(t)$ , являющегося следствием неидеальности системы:

$$x_{BX}(t) = x(t) + d(t),$$

где  $d(t)$  можно рассматривать как постоянную или периодически изменяющуюся функцию, непрерывную во времени, амплитуда которой меньше, чем у полезной компоненты:

$$\begin{aligned} |d(\tau)| &\leq \mu x_{\max}(\tau), \quad \tau \in [0; T], \quad 0 \leq \mu < 0,5; \\ |\dot{d}(\tau)| &\leq \mu \dot{x}_{\max}(\tau), \quad \tau \in (0; T^+) \cup (T^+; T). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что производная  $\dot{d}(\tau)$  должна быть равна нулю в любой момент времени  $\tau$ , когда производная основного сигнала  $\dot{x}(\tau)$  равна нулю. Для гармонического входного сигнала это условие означает очень малое значение возмущающего воздействия на начальном промежутке сигнала, что в реальных системах встречается довольно редко. Выберем в качестве входа периодический сигнал (близкий к представленному на рис. 1), тогда абсолютное значение производной  $\dot{d}(\tau)$  должно быть меньше тангенса угла наклона входного сигнала.

Пусть  $T = 2$ , тогда  $T^+ = 1$ , и пусть  $x_{\max}(t) = -x_{\min}(t) = 1$  (рис. 4, а). Пусть второй периодический входной сигнал соотносится с первым как  $x_1(t) = x(t) + \lambda$ , где  $\lambda = 0, 2 = \text{const}$ . Предельный цикл для двух периодических сигналов показан на рис. 4, б.

Согласно алгоритму, описанному выше, при возрастании входного сигнала,  $x \in [x_{\min}; x_{\max}]$ , получим:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\bar{F}_R(x(0) + 0, 2) - \bar{F}_R(x(0))}{0, 2} = \\ &= \frac{\bar{F}_R(-1) + 0, 2 - \bar{F}_R(-1)}{0, 2}; \end{aligned}$$

$$\theta(x_i) = \bar{F}_R(x_i) - k_x x_i, \quad i = 0, 1, 2 \dots m.$$

Поскольку для любого  $i$  верно соотношение  $x_i < x_{i+1}$ , то  $\theta(x_i) < \theta(x_{i+1})$ , то существует такое единственное значение  $m$ , при котором  $\theta(x_m) \leq 0 < \theta(x_{m+1})$ , где  $m$  — целочисленное,  $m \in Z$ . Тогда

$$a = \frac{\theta(x_{m+1}) - \theta(x_m)}{x_{m+1} - x_m}.$$

Константы  $x_1$  и  $x_2$  выбираем из условия  $x_2 = x(\tau_2) > x_1 = x(\tau_1) > x_0$ . Тогда параметры  $n$ ,  $b$ ,  $k_w$ ,  $\rho$  определяются как:

$$n = \frac{\ln \frac{\theta(x_{\tau_2+1}) - \theta(x_{\tau_2}) - a}{\theta(x_{\tau_1+1}) - \theta(x_{\tau_1}) - a}}{\ln \frac{\theta(x_{02})}{\theta(x_{01})}};$$

$$b = \frac{a - \frac{\theta(x_{\tau_2+1}) - \theta(x_{\tau_2})}{x_{\tau_2+1} - x_{\tau_2}}}{\theta(x_{02})^n}; \quad k_w = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \rho = \frac{a}{k_w}.$$

Выходной сигнал, соответствующий  $i$ -му значению входного сигнала, определяется как:

$$\bar{\omega}(x_i) = \frac{\theta(x_i)}{k_w}, \quad i = 0, 1, 2 \dots m.$$

Значение  $x_3$  выбираем из условия  $x_3 = x(\tau_3) < x_0$  и вычисляем параметр  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{\frac{\bar{\omega}(x_{\tau_3+1}) - \bar{\omega}(x_{\tau_3})}{x_{\tau_3+1} - x_{\tau_3}} - 1}{2(-\bar{\omega}(x_3))^n} + 0,5.$$

Расчетные значения параметров  $n$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $k_w$ ,  $k_x$  нормализованной модели в пакете Matlab для заданных начальных параметров системы и экспериментальные значения представлены в табл. 2.

Таблица 2. Значения параметров моделирования

[Table 2. Modeling parameter values]

Параметр	Заданное значение	Расчетное значение
$k_x$	2	2,0000
$k_w$	1,5	1,5071
$\rho$	1	0,9923
$\sigma$	2	1,9831
$n$	1	0,9956

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Универсальность модели Боука — Вена и ее применимость для описания широкого круга нелинейных гистерезисных систем обусловлена возможностью управления параметрами модели. Представленная в настоящей работе нормализованная модель Боука — Вена позволяет выполнить идентификацию

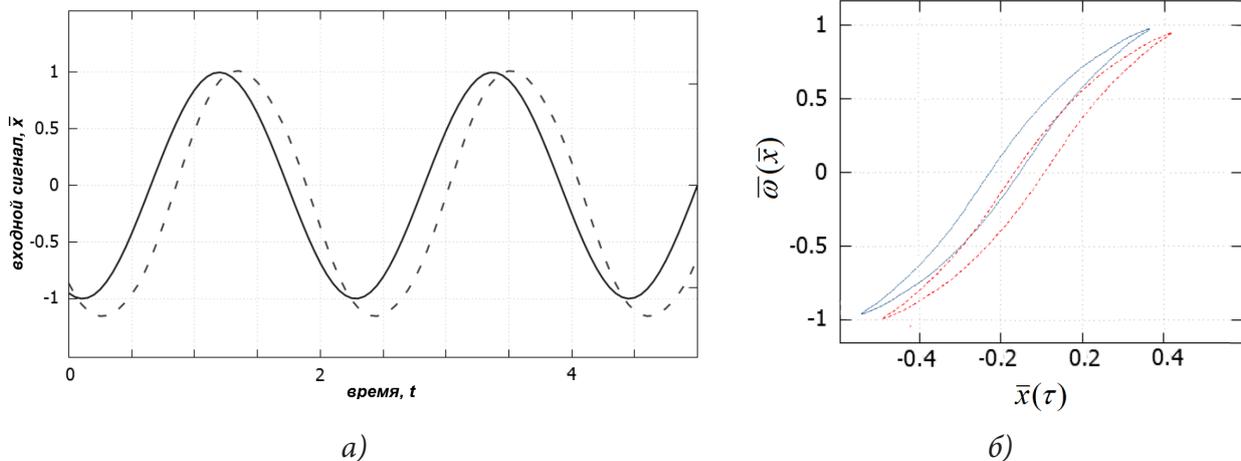


Рис. 4. Результат моделирования согласно приведенному алгоритму: а) входные сигналы  $x(t)$  (сплошная линия) и  $x_1(t)$  (пунктир) и б) выход модели

[Fig.4. The described algorithm modeling results: a) inputs  $x(t)$  (solid) and  $x_1(t)$  (dashed); b) output]

параметров модели с помощью предельного цикла гистерезиса. Формализация модели в виде дифференциального уравнения дает возможность описать предельный цикл аналитически и определить зависимости параметров нормализованной модели. Представленный алгоритм идентификации параметров обладает ограничениями, обусловленными структурой модели, и зависит от типа входного сигнала. Тем не менее, практическое применение модели Боука — Вена показывает, что для многих нелинейных систем предельный цикл наблюдается при различных формах входных сигналов. Кроме того, аналитическая оценка параметров модели предложенным допускает численную интерпретацию, что облегчает ее применение в реальных прикладных задачах.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hassani V., Tjahjowidodo T., Do T. N.* A survey on hysteresis modeling, identification and control // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2014. – V. 49. – P. 209–233.
2. *Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А.* Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами // *Математическое моделирование*. – 2019. – Т. 31. – № 7. – С. 109–126.
3. *Isaak D. Mayergoyz.* *Mathematical Models of Hysteresis and their Applications: Second Edition (Electromagnetism)*, 1st ed., Academic Press, 2003. – 498 p.
4. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Rukavitsyn A. G., Gorlov V. A., Meleshenko P. A.* Hysteretic damper based on the Ishlinsky-Prandtl model // *MATEC Web of Conferences* 83, 01008. – 2016. – DOI: 10.1051/mateconf/20168301008.
5. *Семёнов М. Е., Матвеев М. Г., Мелешенко П. А., Соловьев А. М.* Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2019. – Т. 20. – № 2. – С. 106–113.
6. *Szabó Zs., Füzi J.* Implementation and Identification of Preisach type Hysteresis Models with Everett Function in Closed Form // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2016. – V. 406, No. 15. – P. 251–258.
7. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 271 с.
8. *Dahl P.* Solid friction damping of mechanical vibrations // *AIAA Journal*. – 1976. V. 14. – P. 1675–1682.
9. *Заблоцкая Т. Ю.* Анализ влияния параметров модели Боука — Вена на форму петли гистерезиса // *Вестник Воронежского государственного технического университета*. – 2020. – Т. 16. – № 4. – С. 40–47.
10. *Li S.J., Yu H., Suzuki Y.* Identification of non-linear hysteretic systems with slip // *Computers and Structures*. – 2004. – V. 82. – P. 157–165.
11. *Charalampakis A. E., Koumousis V. K.* Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm // *Journal of Sound and Vibration*. – 2008. – 314(3–5). – P. 571–585.
12. *Kwok N. M., Ha Q. P., Nguyen M. T., Li J., Samali B.* Bouc — Wen model parameter identification for a MR fluid damper using computationally efficient GA // *ISA Transactions*. – 2007. – V. 46. – P. 167–179.
13. *Charalampakis A. E., Dimou C. K.* Identification of Bouc — Wen hysteretic systems using particle swarm optimization. // *Comput. Struct.* – 2010. – 88. – P. 1197–1205.
14. *Zhao Y, Noori M, Altabey W. A., Awad T. A.* Comparison of Three Different Methods for the Identification of Hysterically Degrading Structures Using BWBN Model. // *Front. Built Environ.* – 2019. – 4:80. – DOI: 10.3389/fbuil.2018.00080.
15. *Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J.* The hysteresis Bouc — Wen model, a survey // *Archives of Computational Methods in Engineering*. – 2009. – V. 16, No. 2. – P. 161–188.
16. *Carboni B., Mancini C., Lacarbonara W.* Hysteretic Beam Model for Steel Wire Ropes Hysteresis Identification // *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*. – 2015. – P. 261–282.

17. Giuclea, M., Sireteanu, T., Mitu, A. M. Use of genetic algorithms for fitting the Bouc — Wen model to experimental hysteretic curves // *Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl.* 2009. – V. 54. – P. 3–10.
18. Semenov M. E., Zablotskaya T. Yu. Choosing the model of biological neural network for image segmentation of a bio-liquid facie // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* – 2019. – Т. 26, № 1. – С. 70–85. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-70-85.
19. Семенов М. Е., Мелешенко П. А., Решетова О. О. Неограниченные и диссипативные колебания в системах с релейными нелинейностями // *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика.* – 2018. – № 3. – С. 158–171.
20. Медведский А. Л., Мелешенко П. А., Нестеров В. А., Решетова О. О., Семенов М. Е., Соловьев А. М. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.* – 2020. – № 4. – С. 58–82.
21. Semenov M. E., Solovev A. M., Popov M. A., Meleshenko P. A. Coupled inverted pendulums: stabilization problem // *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv).* – 2018. – V. 88, No. 4. – P. 517–524.
22. Ikhouane F. Systems with hysteresis: analysis, identification and control using the Bouc-Wen model / F. Ikhouane, J. Rodellar, United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2007, 202 p.
23. Ikhouane F., Rodellar J. On the Hysteretic Bouc — Wen Model. Part II: Robust Parametric Identification // *Nonlinear Dynamics.* – 2005. – V. 42, No. 1. – P. 79–95.

**Заблоцкая Татьяна Юрьевна** — аспирант, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», преподаватель, Старооскольский филиал научно-исследовательского университета «Белгородский государственный университет».

E-mail: zablotskaja\_t@mail.ru

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1762-4843>

DOI: <https://doi.org/10.17308/sait.2021.1/3367>

Received 23.11.2020

Accepted 26.04.2021

ISSN 1995-5499

## IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF A NORMALIZED BOUC — WEN MODEL

© 2021 T. Yu. Zablotskaya✉

A. A. Ugarov *Technological Institute of National University of Science and Technology «MISIS»,  
42, Mikrorayon Makarenko, 309516 Stary Oskol, Russian Federation  
Belgorod State University (Stary Oskol branch)  
18, Mikrorayon Solnechny, 309502 Stary Oskol, Russian Federation*

**Annotation.** The article considers the problem of identifying the parameters of the Bouc — Wen phenomenological model which describes the functioning of a wide range of nonlinear hysteretic systems by means of differential equations. The parameters of the standard Bouc — Wen model are analysed regarding their effect on the shape of the hysteresis loop. The models are classified with regard to their dissipativity depending on the value range of their parameters. The article provides an analytical description of the input signal, given that the Bouc — Wen model is to be embedded into a biological-based artificial neural network as a hysteresis quantizer. The article describes a parameter identification procedure for a normalized model based on the identification of

✉ Zablotskaya Tatiana Yu.  
e-mail: zablotskaja\_t@mail.ru

the limit cycles of the equations describing the hysteresis loop. The parametric correspondence between the initial standard Bouc — Wen model and the normalized one is considered, as well as the influence of each parameter on the shape of the hysteresis curve. Analysing the input/output correspondence of the Bouc — Wen model, we obtained the analytical dependencies determining the parameters of the normalized model. We also suggest an algorithm for calculating the parameters of the Bouc — Wen model. The theoretical assumptions presented in the article are illustrated by the results of computational experiments.

**Keywords:** hysteresis, Bouc — Wen model, limit cycle, normalized model, parameter identification.

## CONFLICT OF INTEREST

The author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

## REFERENCES

1. *Hassani V., Tjahjowidodo T., Do T. N.* (2014) A survey on hysteresis modeling, identification and control // *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 49. P. 209–233.
2. *Borzunov S. V., Semenov M. E., Selvesyuk N. I., Meleshenko P. A.* (2019) Hysterezisnye preobrazovateli so sluchainymi parametrami // *Matematicheskoe modelirovanie*, Vol.31, no.7. P. 109–126.
3. *Isaak D. Mayergoyz.* (2003) *Mathematical Models of Hysteresis and their Applications: Second Edition (Electromagnetism)*, 1st ed., Academic Press, 498 p.
4. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Rukavitsyn A. G., Gorlov V. A., Meleshenko P. A.* (2016). Hysteretic damper based on the Ishlinsky-Prandtl model // *MATEC Web of Conferences* 83, 01008. – DOI: 10.1051/mateconf/20168301008.
5. *Semenov M. E., Matveev M. G., Meleshenko P. A., Solovjov A. M.* (2019) Dinamika dempfiroyuschego ustroystva na osnove materiala Ishlinskogo. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. Vol. 20, no. 2. P. 106–113.
6. *Szabó Zs., Füzi J.* (2016) Implementation and Identification of Preisach type Hysteresis Models with Everett Function in Closed Form // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. Vol. 406, no. 15. – P. 251–258.
7. *Krasnosel'skii M. A., Pokrovski A. V.* (1983) *Sistemy s hysterezisom*. Moscow, Nauka, 271 p.
8. *Dahl P.* (1976) Solid friction damping of mechanical vibrations // *AIAA Journal*. Vol. 14. P. 1675–1682.
9. *Zablotskaya T. Yu.* (2020) Analiz vliyaniya parametrov modeli Bouka — Wena na formu petli hysterezisa. *Bulletin of Voronezh State Technical University*. Vol. 16, no. 4. P. 40–47.
10. *Li S. J., Yu H., Suzuki Y.* (2004) Identification of non-linear hysteretic systems with slip // *Computers and Structures*. Vol. 82. P. 157–165.
11. *Charalampakis A. E., Koumousis V. K.* (2008) Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm // *Journal of Sound and Vibration*. 314(3–5). P. 571–585.
12. *Kwok N. M., Ha Q. P., Nguyen M. T., Li J., Samali B.* (2007) Bouc-Wen model parameter identification for a MR fluid damper using computationally efficient GA // *ISA Transactions*. Vol. 46. P. 167–179.
13. *Charalampakis A. E., Dimou C. K.* (2010) Identification of Bouc — Wen hysteretic systems using particle swarm optimization. *Comput. Struct.* 88. P. 1197–1205.
14. *Zhao Y, Noori M, Altabey W. A. and Awad T.* (2019) A Comparison of Three Different Methods for the Identification of Hysterically Degrading Structures Using BWBN Model. *Front. Built Environ.* 4:80. DOI: 10.3389/fbuil.2018.00080.
15. *Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J.* (2009) The hysteresis Bouc-Wen model, a survey // *Archives of Computational Methods in Engineering*. Vol. 16, No. 2. P. 161–188.
16. *Carboni B., Mancini C., Lacarbonara W.* (2015) Hysteretic Beam Model for Steel Wire Ropes Hysteresis Identification // *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*. P. 261–282.
17. *Giuclea M., Sireteanu T., Mitu A. M.* (2009) Use of genetic algorithms for fitting the Bouc-Wen model to experimental hysteretic curves // *Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl.* Vol. 54. P. 3–10.
18. *Semenov M. E., Zablotskaya T. Yu.* (2019) Choosing the model of biological neural network for image segmentation of a bio-liquid face // *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*. Vol. 26,

No 1. P. 70-85. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-70-85.

19. *Semenov M. E., Meleshenko P. A., Reshetova O. O.* (2018) Neogranichennyye i dissipativnyye kilebaniya v sistemakh s releynymi nelineinostyami // Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. No. 3. P. 158–171.

20. *Medvedski A. L., Meleshenko P. A., Nesterov V. A., Reshetova O. O., Semenov M. E., Solovjov A. M.* (2020) Neustoichivyye kolebatelnyye sistemy s histerezisom: zadachi stabolozatsii i upravleniya. Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. No. 4. P. 58–82.

21. *Semenov M. E., Solovev A. M., Popov M. A., Meleshenko P. A.* (2018) Coupled inverted pendu-

lums: stabilization problem // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). Vol. 88, No. 4. P. 517–524.

22. *Ikhouane F.* Systems with hysteresis: analysis, identification and control using the Bouc-Wen model / F. Ikhouane, J. Rodellar, United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2007, 202 p.

23. *Ikhouane F., Rodellar J.* (2005) On the Hysteretic Bouc — Wen Model. Part II: Robust Parametric Identification // Nonlinear Dynamics. Vol. 42, No. 1. P. 79–95.

**Zablotskaya Tatiana Yu.** — post-graduate student, A. A. Ugarov Technological Institute of National University of Science and Technology “MISIS” (Stary Oskol branch), lecturer, Belgorod State University (Stary Oskol branch).

E-mail: [zablotskaja\\_t@mail.ru](mailto:zablotskaja_t@mail.ru)

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1762-4843>