

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СОЧЕТАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ
ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ**

© 2021 Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко✉

*Казанский национальный исследовательский технический университет
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева
ул. К. Маркса, 10, 420111 Казань, Российская Федерация*

Аннотация. Исследуются свойства математической модели управления тепломассообменом и трением в ламинарном пограничном слое на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. Объединённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученные методом обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына для аппроксимации систем уравнений в частных производных, описывающих ламинарные пограничные слои на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов, применяются в математической модели. Параметры математической модели в точке торможения потока определяются из объединённых систем нелинейных алгебраических уравнений. Вдув в пограничный слой, температурный фактор и магнитное поле используются в качестве управлений.

Рассматриваются случаи применения на всём участке управления сочетаний линейного вдува, линейного температурного фактора и постоянного магнитного поля. Дается постановка прямой задачи. Получены зависимости значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики (интегрального теплового потока и суммарной силы ньютоновского трения) от управляющих воздействий (вдува и температурного фактора). Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, проницаемые поверхности, линейно возрастающий вдув, линейно убывающий вдув, линейно возрастающий температурный фактор, линейно убывающий температурный фактор, интегральный тепловой поток, суммарная сила ньютоновского трения.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является расширенным вариантом материалов докладов, представленных на Международную конференцию «ВЗМШ С. Г. Крейна–2020» [1, 2].

Для анализа влияния реальных физико-химических процессов (возбуждение ко-

лебательных уровней молекул, диссоциация, ионизация [3]) на тепломассообмен и трение в ламинарном пограничном слое (ЛПС) на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), совершающих полёты в плотных слоях атмосферы, необходима разработка адекватных математических моделей, учитывающих все особенности этих процессов.

С помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына

✉ Бильченко Наталья Григорьевна
e-mail: bilchnat@gmail.com



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

[4] системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), описывающие ЛПС, могут быть сведены к аппроксимирующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Этот подход, требующий большой подготовительной работы, очень популярен в инженерной практике для расчёта аэродинамических характеристик течений сжимаемых газов [5–8]. В [9, 10] получены аппроксимирующие системы ОДУ, описывающие ЛПС на участке управления для проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей ГЛА.

Влияние на параметры $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$, $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$ математической модели ЛПС, на локальные характеристики $q(x)$, $f(x)$ теплообмена и трения сочетаний постоянных и/или линейных управляющих воздействий — вдува $m(x)$, температурного фактора $\tau_w(x)$ и магнитного поля $s(x)$ рассмотрено в [11–18].

Влияние на функционалы гиперзвуковой аэродинамики (интегральный тепловой поток Q и суммарную силу ньютоновского трения F , являющиеся интегральными характеристиками теплообмена и трения) и на мощность N системы, обеспечивающей вдув, рассмотрено (на всём участке управления [19]) для следующих сочетаний управляющих воздействий:

1) для постоянных вдува m , температурного фактора τ_w и магнитного поля s [15, 16, 20–24];

2) для линейного вдува $m(x)$ и постоянных температурного фактора τ_w и магнитного поля s [22, 25];

3) для линейного температурного фактора $\tau_w(x)$ и постоянных вдува m и магнитного поля s [26].

В данной работе, продолжающей исследование свойств математической модели ЛПС электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях ГЛА [9–18, 20–26], рассматривается влияние следующего сочетания управляющих воздействий: **линейно возрастающего/ убывающего** вдува, **линейно возрастающего/ убывающего** температурного фактора и постоянного магнитного поля на **интегральные** характеристики теплообмена и трения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую прямую задачу [24]:

$$(m, \tau_w, s) \rightarrow (q, f, \eta; Q, F, N). \quad (1)$$

По заданным управлениям: $m(x)$ — вдуву в ЛПС, где $x \in X = [0; 1]$, а ось x направлена вдоль контура тела; $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$ — температурному фактору, где $T_w(x)$ — температура стенки, а T_{e_0} — температура в точке торможения $x_0 = 0$ потока; $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ — магнитному полю требуется рассчитать параметры $\theta_0(x; m, \tau_w, s)$, $\theta_1(\dots)$, $\omega_0(\dots)$, $\omega_1(\dots)$ математической модели ЛПС [10, 24] для случаев обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и поверхности сферического носка. Для нахождения параметров $\theta_0, \dots, \omega_1$ ЛПС применяется **объединённая** аппроксимирующая система ОДУ (5)–(8) [24] с начальными условиями, полученными из объединённой нелинейной алгебраической системы (10)–(13) [24]. После этого определяются локальный тепловой поток $q(x; m, \tau_w, s)$; локальное напряжение трения $f(x; m, \tau_w, s)$; локальная мощность системы, обеспечивающей вдув $\eta(x; m, \tau_w, s)$. Затем (для $x_k = 1$) определяются **интегральный тепловой поток** (2) [24]

$$Q(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx; \quad (2)$$

суммарная сила трения Ньютона (3) [24]

$$F(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx; \quad (3)$$

вычисляемая с использованием фильтрационного закона Дарси **суммарная мощность** (4) [24]

$$N(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} a v_w^2(x) \cdot dx \quad (4)$$

системы, обеспечивающей вдув. В (2)–(4) коэффициент $k_4 = 0$ для боковой поверхности цилиндра, $k_4 = 1$ для поверхности сферического носка с радиусом $r(x)$.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха } M_\infty \in [10; 40]; \quad (5)$$

высота полёта $H \in [10; 30]$ [км]; (6)

радиус тела $R \in [0, 1; 1]$ [м]. (7)

Пусть диапазоны изменения управляющих параметров ограничены:

$m \in M^c = [0; 1]$; (8)

$\tau_w \in T_{pr}^c = [0, 15; 0, 9]$, $T_{pr}^c \subset T_{th}^c = [0; 1]$; (9)

$s \in S^c = [0; 5 \cdot 10^4]$ [Тл / (Ом·м)]. (10)

Далее индекс “w” параметра τ_w и размерность [Тл / (Ом·м)] параметра s опущены.

Линейный вдув $m(x)$, определяемый законом (8) [17]

$$m(x) = m(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1-x) + m_1 \cdot x = m_0 + m' \cdot x, \quad (11)$$

где $m_0, m_1 \in M^c$, $m' = m_1 - m_0$, назовём [11] *возрастающим* (для $m' > 0$) или *убывающим* (для $m' < 0$) *слабо* при $|m'| \in (0; 0, 3)$, *умеренно* при $|m'| \in [0, 3; 0, 7)$, *сильно* при $|m'| \in [0, 7; 1]$.

Линейный температурный фактор $\tau(x)$, определяемый законом (8) [18]

$$\tau(x) = \tau(x; \tau_0, \tau_1) = \tau_0 \cdot (1-x) + \tau_1 \cdot x = \tau_0 + \tau' \cdot x, \quad (12)$$

где $\tau_0, \tau_1 \in T^c$, $\tau' = \tau_1 - \tau_0$, назовём [11] *возрастающим* (для $\tau' > 0$) или *убывающим* (для $\tau' < 0$) *слабо* при $|\tau'| \in (0; 0, 25)$, *умеренно* при $|\tau'| \in [0, 25; 0, 5)$, *сильно* при $|\tau'| \in [0, 5; 0, 75]$.

Обозначим

$M_{05}^d = \{0; 0, 05; \dots; 0, 95; 1\} \subset M^c$; (13)

$M_{25}^d = \{0; 0, 25; 0, 5; 0, 75; 1\} \subset M_{05}^d$; (14)

$M_{25'}^d = \{0, 25; 0, 5; 0, 75\} \subset M_{25}^d$; (15)

$T_{05,th}^d = \{0; 0, 05; \dots; 0, 95; 1\} \subset T_{th}^c$; (16)

$T_{05,pr}^d = \{0, 15; 0, 2; \dots; 0, 9\} = T_{05,th}^d \cap T_{pr}^c$; (17)

$T_{15}^d = \{0, 15; 0, 3; \dots; 0, 9\} \subset T_{05,pr}^d$; (18)

$T_{15'}^d = \{0, 15; 0, 45; 0, 6\} \subset T_{15}^d$; (19)

$S_{25}^d = \{0; 2, 5 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4\} \subset S^c$. (20)

Вычислительные эксперименты для удобства сравнения с [9, 15, 16, 20–26] выполнены для воздуха в атмосфере Земли при $H = 10$ [км], $M_\infty = 10$, $R = 0, 1$ [м].

На рис. 1–12 представлены (символ «◇») результаты вычислительных экспериментов для случаев [11–14] управлений (11), (12) при $m_0, m_1 \in M_{25}^d$ и $\tau_0, \tau_1 \in T_{15}^d$ для некоторых сочетаний $|m'| \in M_{25'}^d$ и $|\tau'| \in T_{15'}^d$ при $s \equiv 0 \in S_{25}^d$. Распределение случаев сочетаний законов управления по рисункам указано в табл. 1.

Таблица 1
[Table 1]

	$ m' $	0, 25	0, 25	0, 50
	$ \tau' $	0, 15	0, 45	0, 15
$m' > 0, \tau' > 0$		рис.1	рис.2	рис.3
$m' > 0, \tau' < 0$		рис.4	рис.5	рис.6
$m' < 0, \tau' > 0$		рис.7	рис.8	рис.9
$m' < 0, \tau' < 0$		рис.10	рис.11	рис.12

Сопоставляя [17, 18] элементам множеств M_{05}^d и $T_{05,th}^d$ буквы латинского алфавита от “a” до “u”, элементам $T_{05,pr}^d$ — буквы от “d” до “s”, отметим положение пар (Q, F) для некоторых сочетаний управлений. Например, “afdg” соответствует $(m_0 = 0, 0; m_1 = 0, 25; \tau_0 = 0, 15; \tau_1 = 0, 3)$.

На рис. 1–12 использована криволинейная сетка [23, 24] образов (Q, F) линий двух семейств управлений

$$M = \left\{ \left\{ (m, \tau, s) \mid m = Const \in M^c \right\} \mid \tau = Const \in T_{05,th}^d, s \equiv 0 \right\}; \quad (21)$$

$$T = \left\{ \left\{ (m, \tau, s) \mid \tau = Const \in T_{th}^c \right\} \mid m = Const \in M_{05}^d, s \equiv 0 \right\}. \quad (22)$$

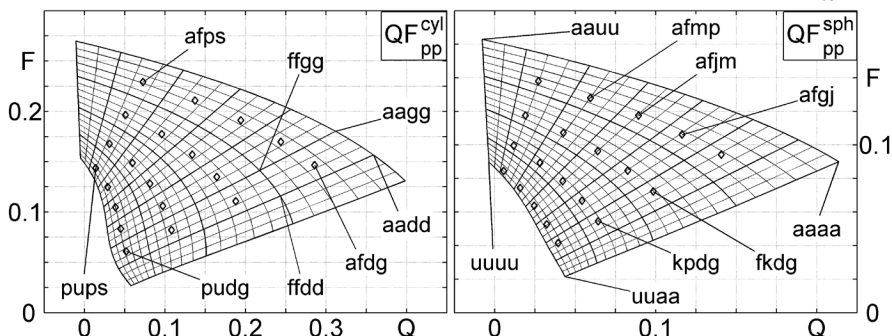


Рис. 1. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = +0, 25$, $\tau' = +0, 15$, $s \equiv 0$
[Fig. 1. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = +0, 25$, $\tau' = +0, 15$, $s \equiv 0$]

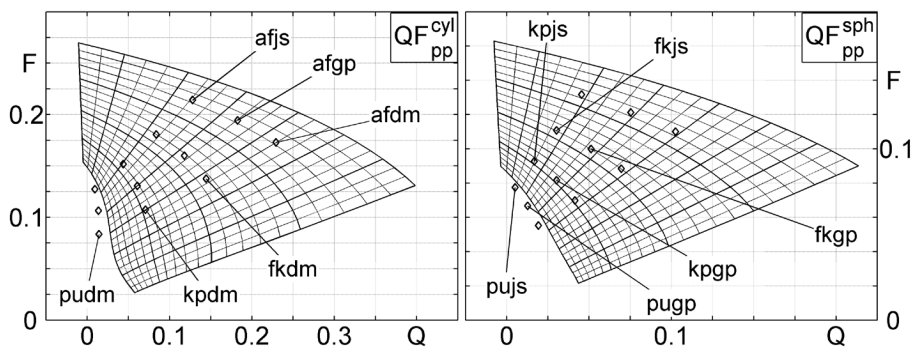


Рис. 2. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = +0,25$, $\tau' = +0,45$, $s \equiv 0$
 [Fig. 2. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = +0,25$, $\tau' = +0,45$, $s \equiv 0$]

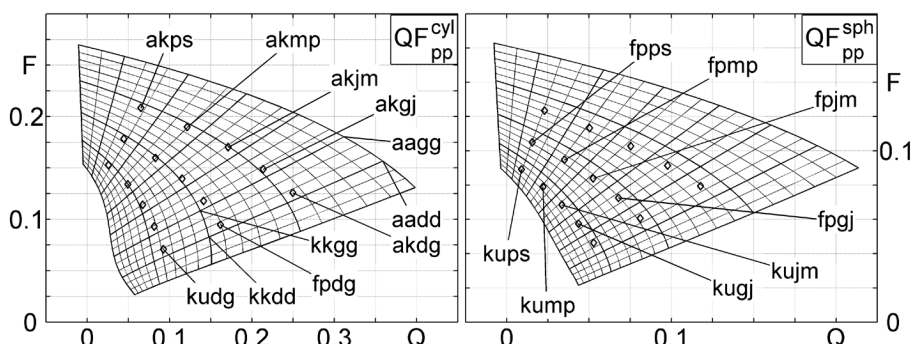


Рис. 3. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = +0,50$, $\tau' = +0,15$, $s \equiv 0$
 [Fig. 3. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = +0,50$, $\tau' = +0,15$, $s \equiv 0$]

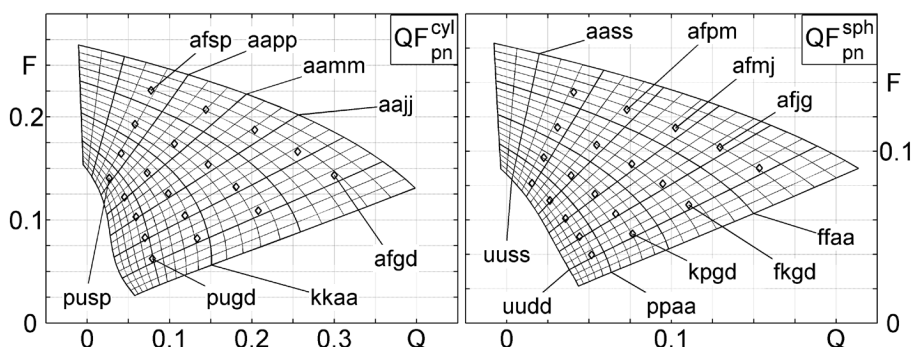


Рис. 4. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = +0,25$, $\tau' = -0,15$, $s \equiv 0$
 [Fig. 4. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = +0,25$, $\tau' = -0,15$, $s \equiv 0$]

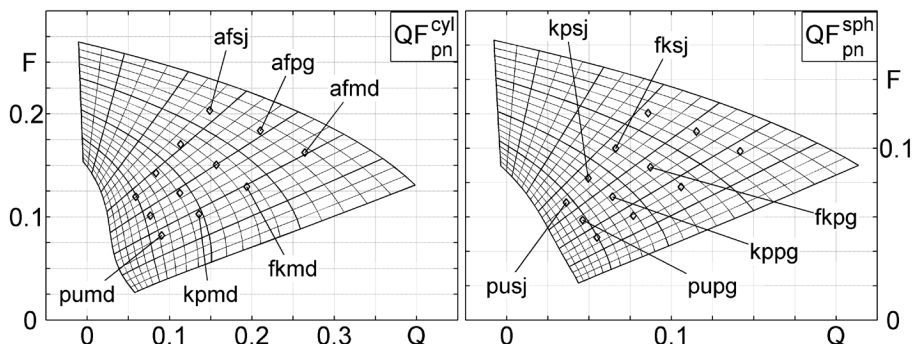


Рис. 5. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = +0,25$, $\tau' = -0,45$, $s \equiv 0$
 [Fig. 5. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = +0,25$, $\tau' = -0,45$, $s \equiv 0$]

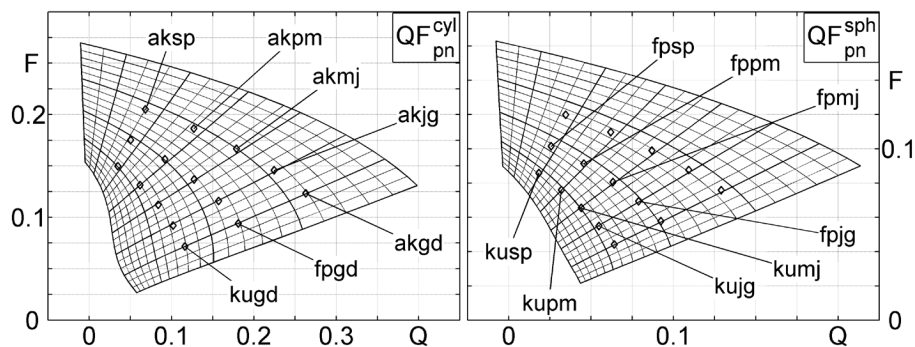


Рис. 6. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = +0,50$, $\tau' = -0,15$, $s \equiv 0$
 [Fig. 6. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = +0,50$, $\tau' = -0,15$, $s \equiv 0$]

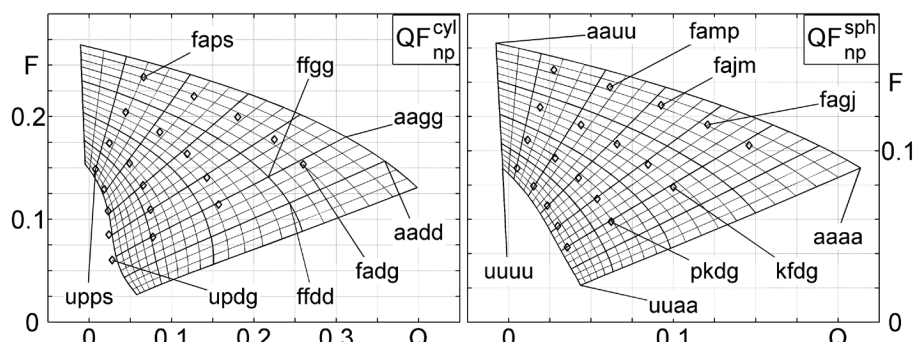


Рис. 7. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = -0,25$, $\tau' = +0,15$, $s \equiv 0$
 [Fig. 7. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = -0,25$, $\tau' = +0,15$, $s \equiv 0$]

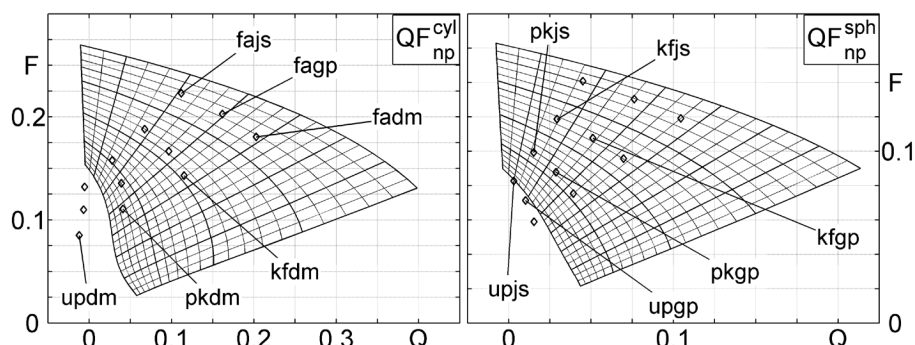


Рис. 8. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = -0,25$, $\tau' = +0,45$, $s \equiv 0$
 [Fig. 8. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = -0,25$, $\tau' = +0,45$, $s \equiv 0$]

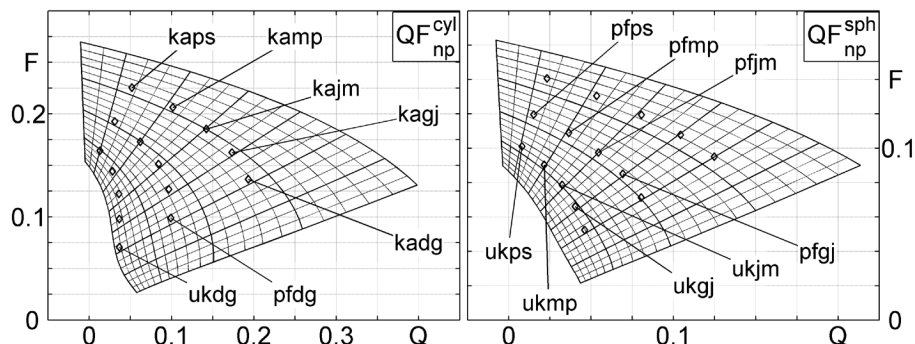


Рис. 9. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = -0,50$, $\tau' = +0,15$, $s \equiv 0$
 [Fig. 9. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = -0,50$, $\tau' = +0,15$, $s \equiv 0$]

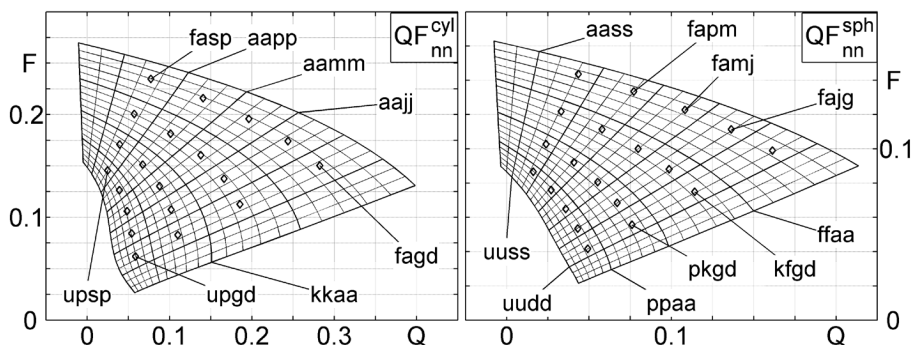


Рис. 10. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = -0,25, \tau' = -0,15, s \equiv 0$
 [Fig. 10. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = -0,25, \tau' = -0,15, s \equiv 0$]

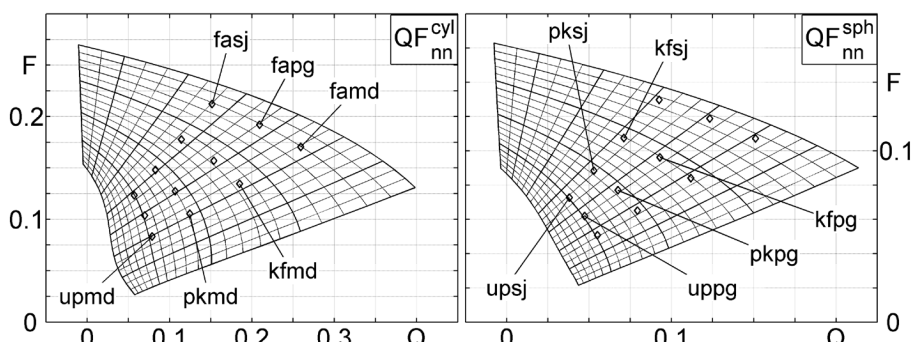


Рис. 11. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = -0,25, \tau' = -0,45, s \equiv 0$
 [Fig. 11. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = -0,25, \tau' = -0,45, s \equiv 0$]

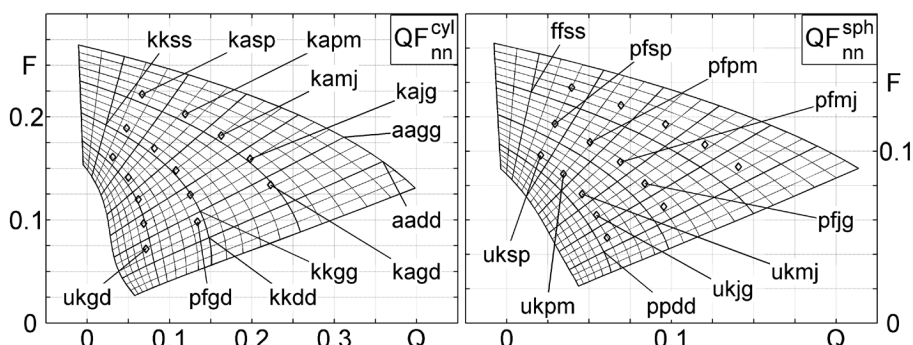


Рис. 12. Область $\Omega = \{(Q, F)\}$ для $m' = -0,50, \tau' = -0,15, s \equiv 0$
 [Fig. 12. The domain $\Omega = \{(Q, F)\}$ for $m' = -0,50, \tau' = -0,15, s \equiv 0$]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучено влияние на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики (на интегральный тепловой поток Q и суммарную силу ньютоновского трения F) четырёх сочетаний наиболее простых представителей класса монотонных функций — линейно возрастающего/ убывающего вдува и линейно возрастающего/ убывающего температурного фактора.

Полученные результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы в

качестве ограничений в задачах синтеза эффективного управления как на всём участке [19], так и на его фрагментах [27].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко, Г. Г. О влиянии линейно возрастающего вдува и линейного темпера-

турного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2020» / под. ред. В. А. Костина. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2020. – С. 63–70.

2. Бильченко, Г. Г. О влиянии линейно убывающего вдува и линейного температурного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2020» / под. ред. В. А. Костина. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2020. – С. 71–75.

3. Дорренс, У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. – М.: Мир, 1966. – 439 с.

4. Дородницын, А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. – 1960. – № 3. – С. 111–118.

5. Лю Шэнь-Цюань. Расчёт ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува / Лю Шэнь-Цюань // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 868–883.

6. Павловский, Ю. Н. Численный расчёт пограничного слоя в сжимаемом газе / Ю. Н. Павловский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2, № 5. – С. 884–901.

7. Башкин, В. А. Расчёт уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя методом интегральных соотношений / В. А. Башкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 6. – С. 1280–1290.

8. Гараев, К. Г. Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях / К. Г. Гараев // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. – № 3. – С. 92–100.

9. Bilchenko, N. G. On optimum control of laminar boundary layer of electroconductive gas by supersonic flow conditions / N. G. Bilchenko, K. G. Garaev // Proceedings of 12th NATIONAL

HEAT TRANSFER CONFERENCE (UIT). – L'Aquila, Italy. – 1994. – P. 213–224.

10. Бильченко, Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

11. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 3. – С. 53–62.

12. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 4. – С. 5–12.

13. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейно убывающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 4. – С. 13–20.

14. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейно убывающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2020. – № 1. – С. 5–14. [doi: 10.17308/sait.2020.1/2573]

15. Bilchenko, N. G. Permeable Surfaces Hypersonic Aircraft Optimal Heat Protection

Mathematical Modeling / N. G. Bilchenko // Proc. 2015 Int. Conf. “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP), Russia, Saint-Petersburg, P. 310–313. [<http://ieeexplore.ieee.org/document/7342145/>]

16. Бильченко, Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 3. – С. 5–11.

17. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейного вдува и постоянного температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 2. – С. 5–14.

18. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейного температурного фактора и постоянного вдува на параметры математической модели и локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 2. – С. 15–22.

19. Бильченко, Г. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. IV. Классификация задач на всём участке управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 3. – С. 5–12.

20. Бильченко, Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

21. Бильченко, Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управле-

ния тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

22. Бильченко, Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

23. Bilchenko, G. G. (jr) On the dependence of the domain of values of functionals of hypersonic aerodynamics on controls / G. G. (jr) Bilchenko, N. G. Bilchenko // “The Eighth Polyakhov’s Reading” 30 January–2 February 2018, Saint-Petersburg, Russia. J. AIP Conf. Proc., 2018, Vol. 1959, P. 060002-1–060002-7. [doi: 10.1063/1.5034663]

24. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 2. – С. 5–13.

25. Bilchenko, G. G. On the influence of linear blowing and constant temperature factor on the values of functionals of hypersonic aerodynamics / G. G. Bilchenko, N. G. Bilchenko // International Conference “Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems”, 11–13 November 2019, Voronezh, Russia. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2020, Vol. 1479, № 1, P. 012019. [doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012019]

26. Bilchenko, G. G. On the influence of linear temperature factor and constant blowing on the values of functionals of hypersonic aerodynamics / G. G. Bilchenko, N. G. Bilchenko // International Conference “Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems”, 11–13 November 2019, Voronezh, Russia. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2020, Vol. 1479, № 1, P. 012020. [doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012020]

27. Бильченко, Г. Г. Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 3. – С. 13–22.

Бильченко Григорий Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физико-технических процессов (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.

E-mail: ggbil2@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5020-7403>

Бильченко Наталья Григорьевна — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физико-технических процессов (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения), доцент кафедры теоретической и прикладной механики и математики Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.

E-mail: bilchnat@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4101-6151>

DOI: <https://doi.org/10.17308/sait.2021.2/3501>

ISSN 1995-5499

Received 14.05.2021

Accepted 19.07.2021

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF COMBINATIONS OF LINEAR CONTROLS ON THE DOMAIN OF VALUES OF HYPERSONIC AERODYNAMICS FUNCTIONALS

© 2021 G. G. Bilchenko, N. G. Bilchenko[✉]

*Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev
10, K. Marks Street, 420111 Kazan, Russian Federation*

Annotation. The article studies the properties of a mathematical model designed to control heat and mass transfer and friction in the laminar boundary layer on permeable cylindrical and spherical surfaces of hypersonic aircraft. The mathematical model is based on the systems of ordinary differential equations obtained by A. A. Dorodnitsyn's generalized method of integral relations which was used to approximate the systems of partial differential equations describing laminar boundary layers on the permeable cylindrical and spherical surfaces of hypersonic aircraft. The parameters of the mathematical model at the flow stagnation point are determined from the joint systems of nonlinear algebraic equations. The blowing into boundary layer, the temperature factor and the magnetic field are used as controls.

The article considers the combinations of linear blowing, linear temperature factor and a constant magnetic field being applied to the entire control segment. The statement of direct problem is given. The hypersonic aerodynamics functionals (the total heat flow and the total Newton friction force) dependences on controls (the blowing into

[✉] Bilchenko Natalya G.
e-mail: bilchnat@gmail.com

boundary layer and the temperature factor) are obtained. The computational experiments results are presented.

Keywords: control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, permeable surfaces, linearly increasing blowing, linearly decreasing blowing, linearly increasing temperature factor, linearly decreasing temperature factor, total heat flow, total Newton friction force.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *Bilchenko G. G., Bilchenko N. G.* (2020) On the influence of linearly increasing blowing and linear temperature factor on the domain of values of functionals of hypersonic aerodynamics. Proc. Int. Conf. "Voronezh Winter Mathematical School by S. G. Krein-2020". Voronezh: "Nauchnaya Kniga" Publishers. P. 63–70.
2. *Bilchenko G. G., Bilchenko N. G.* (2020) On the influence of linearly decreasing blowing and linear temperature factor on the domain of values of functionals of hypersonic aerodynamics. Proc. Int. Conf. "Voronezh Winter Mathematical School by S. G. Krein-2020". Voronezh: "Nauchnaya Kniga" Publishers. P. 71–75.
3. *Dorrance W. H.* (1962) *Viscous Hypersonic Flow*. (New York: McGraw-Hill) x+334 p.
4. *Dorodnitsyn A. A.* (1960) On a method of laminar boundary layer equations solution. Applied mathematics and technical physics. No 3. P. 111–118.
5. *Lyu Shen'-Tsyuan'* (1963) Calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas in the presence of suction or blowing. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 2. No 5. P. 1000–1020.
6. *Pavlovsky Yu. N.* (1963) The numerical calculation of the laminar boundary layer in a compressible gas. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 2. No 5. P. 1021–1042.
7. *Bashkin V. A.* (1968) Calculation of the equations of a laminar boundary space layer by the method of integral relations. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 8. No 6. P. 125–138.
8. *Garaev K. G.* (1988) Optimal control of heat and mass transfer in a laminar compressible-gas boundary layer on permeable surfaces. Fluid Dynamics. Vol. 23. No 3. P. 399–406.
9. *Bilchenko N. G., Garaev K. G.* (1994) On optimum control of laminar boundary layer of electroconductive gas by supersonic flow conditions. Proceedings of 12th NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE (UIT). LAquila, Italy. P. 213–224.
10. *Bilchenko N. G.* (2016) A. A. Dorodnitsyn's method in the problems of permeable surfaces in electroconductive gas laminar boundary layer heat and mass transfer optimal control. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 1. P. 5–14.
11. *Bilchenko G. G., Bilchenko N. G.* (2019) Analysis of the influence of linearly increasing blowing and linearly increasing temperature factor on the parameters of the mathematical model and local characteristics of heat and mass transfer and friction on the permeable surfaces of the hypersonic aircraft. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 3. P. 53–62.
12. *Bilchenko G. G., Bilchenko N. G.* (2019) Analysis of the influence of linearly increasing blowing and linearly decreasing temperature factor on the parameters of the mathematical model and local characteristics of heat and mass transfer and friction on the permeable surfaces of the hypersonic aircraft. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 4. P. 5–12.
13. *Bilchenko G. G., Bilchenko N. G.* (2019) Analysis of the influence of linearly decreasing blowing and linearly increasing temperature factor on the parameters of the mathematical model and local characteristics of heat and mass transfer and friction on the permeable surfaces of the hypersonic aircraft. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 4. P. 13–20.
14. *Bilchenko G. G., Bilchenko N. G.* (2020) Analysis of the influence of linearly decreasing

blowing and linearly decreasing temperature factor on the parameters of the mathematical model and local characteristics of heat and mass transfer and friction on the permeable surfaces of the hypersonic aircraft. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 1. P. 5–14. [doi: 10.17308/sait.2020.1/2573]

15. Bilchenko N. G. Permeable Surfaces Hypersonic Aircraft Optimal Heat Protection Mathematical Modeling. Proc. 2015 Int. Conf. “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP), Russia, Saint-Petersburg. P. 310–313. [http://ieeexplore.ieee.org/document/7342145/]

16. Bilchenko N. G. (2016) Computational experiments in the problems of heat and mass transfer optimal control on permeable surfaces in electro-conductive gas laminar boundary layer. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 3. P. 5–11.

17. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2019) Analysis of the influence of linear blowing and constant temperature factor on the parameters of the mathematical model and local characteristics of heat and mass transfer and friction on the permeable surfaces of the hypersonic aircraft. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 2. P. 5–14.

18. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2019) Analysis of the influence of linear temperature factor and constant blowing on the parameters of the mathematical model and local characteristics of heat and mass transfer and friction on the permeable surfaces of the hypersonic aircraft. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 2. P. 15–22.

19. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2018) Inverse problems of heat and mass transfer on hypersonic aircrafts permeable surfaces. IV. Classification of problems for the entire segment of control. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 3. P. 5–12.

20. Bilchenko N. G. (2015) Computation experiments in the problems of heat and mass transfer optimal control on permeable surfaces in hypersonic flows. Proc. Voronezh State Univ. Ser. Physics. Mathematics. No 1. P. 83–94.

21. Bilchenko N. G. (2015) Computation experiments in the problems of heat and mass

transfer optimal control on permeable spherical surfaces in hypersonic flows. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 1. P. 5–8.

22. Bilchenko N. G. (2015) Computation experiments in the problems of heat and mass transfer optimal control on permeable surfaces in hypersonic flows: comparative analysis of “simple” blow laws use. Proc. Voronezh State Univ. Ser. Physics. Mathematics. No 1. P. 95–102.

23. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2018) On the dependence of the domain of values of functionals of hypersonic aerodynamics on controls. “The Eighth Polyakhov’s Reading” 30 January–2 February 2018, Saint-Petersburg, Russia. J. AIP Conf. Proc. Vol. 1959. P. 060002-1–060002-7. [doi: 10.1063/1.5034663]

24. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2018) On the influence of controls on the domain of values of hypersonic aerodynamics functionals. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 2. P. 5–13.

25. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2020) On the influence of linear blowing and constant temperature factor on the values of functionals of hypersonic aerodynamics. International Conference “Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems”, 11–13 November 2019, Voronezh, Russia. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1479. No 1. P. 012019. [doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012019]

26. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2020) On the influence of linear temperature factor and constant blowing on the values of functionals of hypersonic aerodynamics. International Conference “Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems”, 11–13 November 2019, Voronezh, Russia. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1479. No 1. P. 012020. [doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012020]

27. Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. (2018) Inverse problems of heat and mass transfer on hypersonic aircrafts permeable surfaces. V. Mixed problems for the fragments of segment of control. Proc. Voronezh State Univ. Ser. System Analysis and Inform. Technologies. No 3. P. 13–22.

Bilchenko Grigorij G. — PhD in Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department for Heat and Power Engineering, Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI.

E-mail: ggbil2@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5020-7403>

Bilchenko Natalya G. — PhD in Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department for Heat and Power Engineering, Associate Professor of Department of Theoretical and Applied Mechanics and Mathematics, Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI.

E-mail: bilchnat@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4101-6151>