МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА, УПРАВЛЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 519.816 ISSN 1995-5499
DOI: https://doi.org/
Поступила в редакцию 14.03.2022
Подписана в печать 22.04.2022

ОБЗОР ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКОВОГО ВЗВЕШЕННОГО АГРЕГИРОВАНИЯ

© 2022 Т. М. Леденева✉, И. А. Левкина

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассматриваются основные классы операций порядкового взвешенного агрегирования, которые получили широкое распространение из-за наличия ряда числовых характеристик, обеспечивающих целенаправленный подход к организации процедуры агрегирования информации в системах мониторинга, информационно-аналитических системах, в экспертных системах и системах поддержки принятия решений, в нечетких системах и других, в которых осуществляется обработка информации в рамках оценочных моделей. Особенностью данного типа операторов является то, что векторная оценка объекта перед агрегированием упорядочивается по невозрастанию или по неубыванию, что позволяет непосредственно учитывать значения компонент, а не важность источников информации, как это делается при использовании взвешенных средних. Моделирование операций агрегирования данного класса сводится к разработке подходов для определения весовых коэффициентов. Назначая определенным образом веса, можно спроектировать процедуру агрегирования с определенными свойствами, в частности, стратегией, компенсационными свойствами, уровнем равномерности учета компонентов векторной оценки. В статье рассматриваются различные семейства операций, реализующих технологию порядкового взвешенного агрегирования, их обобщения и модификации, а также важные случаи. Показана связь данных операторов с интегралами Сугено и Шоке, а также приведены обобщенные представления на основе нечетких мер. Представленный обзор зарубежных публикаций открывает возможности для широкого использования операций агрегирования из данного класса при разработке процедур обработки информации в различных прикладных системах, позволяя обеспечить большую гибкость, многоальтернативность, обоснованность и интерпретируемость.
Ключевые слова: взвешенные средние, OWA-оператор, агрегирование.

ВВЕДЕНИЕ

В основе многих технологий обработки информации, которые используются в процедурах принятия решений, при формировании групповых (коллективных) экспертных оценок, в задачах системного анализа при построении оценочных моделей сложных систем и объектов, в методах кластеризации и классификации, в нейронных сетях, лежат различные типы функций и операций агрегирования. Как правило, постановка задачи формулируется следующим образом: имеется множество объектов, свойства которых описываются множеством показателей (признаков, критериев, характеристик и т. п.), причем оценки каждого показателя формируются в некоторой шкале, и, таким образом, каждому объекту ставится в соответствие векторная оценка, компоненты которой можно рассматривать как *частные* оценки объекта. Требуется построить ранжи-

✉ Леденева Татьяна Михайловна
e-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

рование объектов или их разбиение на классы, или определить лучший объект. Наиболее распространенный подход к решению данной задачи заключается в определении *обобщенных* (комплексных, интегральных) оценок объектов на основе операций или функций агрегирования, при этом считается, что такая оценка в целом характеризует объект по всему множеству показателей.

Под агрегированием подразумевается переход от векторной оценки объекта к некоторой скалярной величине. В [1] введено понятие оценочной системы и уточнена процедура формирования обобщенной оценки. В [2–5] описаны свойства операций агрегирования из семейства средних. Комбинация различных свойств порождает те или иные классы средних. В [2, 3] представлены рекомендации по использованию различных средних в зависимости от природы исходных данных. Операции агрегирования из семейства средних могут учитывать важность (значимость) показателей с помощью весовых коэффициентов (весов), образуя, тем самым, систему предпочтений на множестве показателей. Определение весовых коэффициентов – это отдельный шаг в процедуре агрегирования, который позволяет использовать взвешенные формы средних. Существует значительное количество методов определения весов, но в общем случае можно выделить два базовых подхода: с привлечением экспертов или на основе статистической информации. Одним из широко распространенных является метод парных сравнений [6]. Его достоинством является, прежде всего, простота получения экспертной информации и возможность использования различных шкал для оценки важности одного показателя по сравнению с другим. Для обработки матрицы парных сравнений применяются различные методы, среди которых наиболее распространенным является метод, в соответствии с которым вектор весов есть собственный вектор, отвечающий максимальному собственному значению матрицы парных сравнений [7]. В общем случае выделяют три подхода к использованию весов при агрегировании [8]: a) вес назначается каждому аргументу и отражает его значимость (этот случай описан выше); b) определение весов связывают с упорядочением аргументов, и тогда первому аргументу назначается первый вес из вектора весов, второму аргументу – второй вес и т.д.; c); вес аргумента определяется его позицией в некоторой шкале. Помимо общих подходов к формированию процедур агрегирования количественной информации развиваются подходы, ориентированные на обработку информации других типов помимо количественной. Так, в [9] представлены операторы агрегирования истиностной (истинной или ложной) информации. При разработке интеллектуальных информационных систем актуальной проблемой является агрегирование нечеткой [10, 11] и, в том числе, лингвистической [10, 12] информации. Также для агрегирования нечеткой информации используются T-нормы и S-конормы [13], которые формализуют связки *и* и *или* в нечеткой логике и теории нечетких множеств, а также гибриды на их основе, относящиеся к так называемым компенсаторным операторам [14, 15]. Исследование треугольных норм и конорм, представимых рациональными функциями, представлено в [13, 16]. В [17] предложены операции агрегирования для интуиционистских нечетких множеств; в [18, 19] – для агрегирования интуиционистской информации на основе средних; в [20] – для работы со специальными множествами. Настоящим событием в теории функций агрегирования является появление класса порядковых операций агрегирования [21], для которых весовые коэффициенты имеют принципиально иную интерпретацию и не связаны со значимостью показателей. Цель статьи заключается в представлении основных результатов, относящихся к данному классу и, в основном, полученных зарубежными исследователями.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1.1. Основные понятия и определения

В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ – вектор частных оценок с компонентами из $[0,1]$, $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$ –

вектор весовых коэффициентов $w_i \in [0,1]$ $(i=\overline{1,n})$, для которого выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ (условие нормировки, нормализация).

Рассмотрим общее определение оператора агрегирования [5, 22]: n-мерный оператор агрегирования есть отображение $A:[0,1]^n \to [0,1]$, удовлетворяющее следующим условиям: а) $A(0,...,0)=0$, $A(1,...,1)=1$; б) для любых векторов $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$ и $\boldsymbol{x}'=(x_1',...,x_n')$ с компонентами из $[0,1]$, таких что $\forall i=\overline{1,n}$ $(x_i \le x_i')$, выполняется неравенство $A(\boldsymbol{x}) \le A(\boldsymbol{x}')$.

Заметим, что в данном случае от операторов агрегирования требуются только два свойства – ограниченность и монотонность. Однако возможны и другие требования, учитывающие такие свойства алгебраических операций [3, 5, 22, 23], как непрерывность, ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, однородность (гомогенность), наличие единичного и обратного элементов и др. Коммутативность (симметричность) означает, что обобщенная оценка не зависит от индексации компонент векторной оценки, т. е. при любой перестановке частных оценок значение обобщенной оценки сохранится. Идемпотентность означает, что если все частные оценки равны некоторому значению, то и обобщенная оценка должна совпадать с этим значением. Известно, что оператор агрегирования является идемпотентным тогда и только тогда, когда он принадлежит к классу средних [2] (данное свойство также называется свойством Парето). Однородность означает выполнение следующего свойства: $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ для любой мультипликативной константы $\lambda>0$. Помимо перечисленных, существуют и другие свойства, которые присущи специальным классам операторов агрегирования, или в целом характеризуют поведение лица, принимающего решение, или интерпретируемость параметров процедуры агрегирования [3,14].

Пусть $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ – непрерывная, строго монотонная функция и $A:[0,1]^n \to [0,1]$ – оператор агрегирования, тогда *φ-преобразование* оператора A является оператором агрегирования и определяется следующим образом [14, 22]:

$$A^{\varphi}(\boldsymbol{x})=\varphi^{-1}\Big(A\big(\varphi(x_1),...,\varphi(x_n)\big)\Big).$$

С помощью φ-преобразования можно ввести понятие двойственности. Например, если $\varphi(x)=1-x$ и A есть оператор агрегирования, то *двойственным* к нему называется оператор

$$A^{c}(\boldsymbol{x})=1-A(1-x_1,...,1-x_n).$$

Оператор A называется *самодвойственным*, если он совпадает со своим двойственным, т. е.

$$A(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})=1-A(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(1-x_1,...,1-x_n)=1-A(x_1,...,x_n).$$

В [14] представлена наиболее общая классификация функций агрегирования, согласно которой, можно выделить следующие классы:

– класс конъюнктивных функций $A_\wedge$, для которых $A_\wedge(\boldsymbol{x}) \le \min\{x_1,...,x_n\}$;

– класс дизъюнктивных функций $A_\vee$, для которых $A_\wedge(\boldsymbol{x}) \ge \max\{x_1,...,x_n\}$;

– операции осреднения A, которые удовлетворяют неравенству

$$\min\{x_1,...,x_n\} \le A(\boldsymbol{x}) \le \max\{x_1,...,x_n\}.$$

Значительный класс операторов агрегирования составляют средние [2], среди которых среднее арифметическое $A(\boldsymbol{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ представляет простейший и наиболее общий способ агрегирования количественной информации. Обобщением среднего арифметического является взвешенное среднее $A_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ с весами $w_i \in [0,1]$, которые отражают степень важности аргументов. К другим аналитическим средним относятся средняя геометрическая, средняя гармоническая, средняя степенная и т. д. [2]. К классу простых неаналитических средних относится медиана, которая реализует представление о среднем значении, а также ее обобщение – k-порядковая статистика (выбирается элемент, стоящий на позиции k в упорядоченном от минимального до максимального списке аргументов). Ее основными свойствами являются монотонность, коммутативность, ассоциативность, идемпотентность. Обобщенные медианы также рассматриваются в

[24]. Неаналитические средние не могут быть выражены формулой, но определяются по отношению к некоторым или всем рассматриваемым компонентам векторной оценки. Заметим, что min и max являются частными случаями k-порядковой статистики, а их обобщениями являются взвешенные формы следующего вида [25]:

$$\min_{w}(\boldsymbol{x}) = \min_{i}\left\{\max\left\{1-w_i, x_i\right\}\right\},$$

$$\max_{w}(\boldsymbol{x}) = \max_{i}\left\{\min\left\{w_i, x_i\right\}\right\}.$$

В [21, 26] введено определение *OWA-оператора*: n-мерный оператор порядкового взвешенного агрегирования (Ordered Weighted Averaging Aggregation Operator), ассоциированный с вектором весов $\boldsymbol{w}$, есть отображение $F:[0,1]^n \to [0,1]$, такое что

$$F_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} w_{\mathrm{i}} x_{\sigma(i)},$$

где $\sigma:\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ – перестановка, такая что $x_{\sigma(i)} \geq x_{\sigma(i+1)}$.

Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ есть вектор $\boldsymbol{x}$, упорядоченный по невозрастанию, тогда $F_{\boldsymbol{w}}$ можно записать в виде

$$F_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} w_i y_i.$$

Для $F_{\boldsymbol{w}}$ можно определить двойственный OWA-оператор $\hat{F}_{\boldsymbol{v}}$ с вектором весов $\boldsymbol{v} = (v_1,\ldots,v_n)$, которые упорядочены по неубыванию, те есть $v_i = w_{n-i+1}$ $(i=\overline{1,n})$. К основным алгебраическим свойствам OWA-оператора относятся коммутативность, идемпотентность, монотонность. Однако данный оператор не является ассоциативным, а значит, к нему не применимы процедуры декомпозиции.

Заметим, что OWA-оператор имеет две существенные особенности. Во-первых, обобщенная оценка, вычисленная на его основе, есть результат скалярного произведения вектора $\boldsymbol{w}$ на вектор $\boldsymbol{y}$, полученный из вектора $\boldsymbol{x}$ упорядочением элементов по невозрастанию. Во-вторых, в отличие от взвешенных форм средних, весовые коэффициенты в данном случае не связаны с важностью отдельных показателей и определяются на основе специальных процедур, обзор которых представлен ниже. В некоторых случаях может быть получен вектор весов, также упорядоченный определенным образом (по невозрастанию или по неубыванию). Учитывая, что и векторная оценка упорядоченная, получаем, что обобщенная оценка, как результат агрегирования, по сути, соответствует максимальному или минимальному значению скалярного произведения векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{x}$ – в этом особенность OWA и принципиальное отличие от аддитивной взвешенной свертки.

Для специальных случаев весов OWA-оператор превращается в некоторые известные функции [26]: $\boldsymbol{w}^* = (1,0,\ldots,0)$ соответствует $F(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{x}) = \max\{x_1,\ldots,x_n\}$; $\boldsymbol{w}_* = (0,\ldots,0,1)$ – $F(\boldsymbol{w}_*, \boldsymbol{x}) = \min\{x_1,\ldots,x_n\}$; $\boldsymbol{w}_\Delta = \left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$ – $F(\boldsymbol{w}_\Delta, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\boldsymbol{w}_k = (0,\ldots \underset{k-1}{0}, \underset{k}{1}, \underset{k+1}{0},\ldots,0)$ соответствует порядковой k-статистике.

Для произвольного OWA-оператора справедливо неравенство

$$\min\left\{x_1,\ldots,x_n\right\} \leq F(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \leq \max\left\{x_1,\ldots,x_n\right\},$$

которое означает, что в общем случае он является оператором осреднения.

OWA-оператор описывает семейство операторов, которое включает такие хорошо известные операции, как min, max, медиана, среднее арифметическое и другие.

1.2. Числовые характеристики OWA-операторов

Отличительной особенностью OWA-операторов является наличие ряда числовых характеристик, которые позволяют обеспечить целенаправленный подход к формированию стратегии и процедуры агрегирования [26–28]. В [26] выделены следующие три стратегии: *конъюнктивная*, в соответствии с которой обобщенная оценка не может быть лучше самой плохой частной оценки; *дизъюнктивная*, в соответствии с которой обобщенная оценка обусловлена наилучшей из частных оценок; *компромиссная*, согласно которой обобщенная оценка занимает промежуточное положение между частными оценками, участвующими в процессе агрегирования.

Конъюнктивная и дизъюнктивная стратегии формализуются соответственно операциями $\min$ (связка *и*, конъюнкция) и $\max$ (связка *или*, дизъюнкция), компромиссная стратегия – операциями осреднения. Поскольку в общем случае OWA-оператор реализует осреднение, то для оценки его дизъюнктивных и конъюнктивных свойств используются следующие характеристики, введенные в [26]:

$$orness(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n-1}\right) w_i$$

и

$$andness(\boldsymbol{w}) = 1 - orness(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} w_i.$$

Из определения следует, что $orness(\boldsymbol{w}) \in [0,1]$, при этом для $\max$ $orness(\boldsymbol{w}^*) = 1$, для $\min$ $orness(\boldsymbol{w}_*) = 0$, для среднего арифметического $orness(\boldsymbol{w}_\vartriangle) = 0.5$. Для произвольного OWA-оператора введем следующее правило: если $orness(\boldsymbol{w}) > 0.5$, то соответствующий оператор будем называть *квазидизъюнкцией*; если $andness(\boldsymbol{w}) > 0.5$ (а, следовательно, $orness(\boldsymbol{w}) < 0.5$), то *квазиконъюнкцией*.

В [26] показано, что если $F_{\boldsymbol{w}}$ является квазидизъюнкцией, то двойственный оператор $\hat{F}_{\boldsymbol{v}}$ – квазиконъюнкция и наоборот.

Перечислим другие числовые характеристики OWA-оператора, которые учитываются при построении процедур агрегирования и являются, по сути, некоторой обобщенной характеристикой вектора весов $\boldsymbol{w}$:

– *показатель компенсационных свойств* [27]

$$tradeoff(\boldsymbol{w}) = 1 - \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(w_i - 1/n\right)^2}{n-1}} \in [0,1];$$

– *энтропия* или нормированная энтропия (показывает, насколько равномерно учитываются оператором агрегируемые значения) [26]

$$H(\boldsymbol{w}) = -\sum_{i} w_i \log_2 w_i \in [0, \ln n],$$

$$\bar{H}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i} w_i \log_2 w_i \in [0,1];$$

– *обобщенная энтропия Реньи* степени α, где параметр $\alpha \neq 1$ называется степенью энтропии Реньи [29]

$$H_\alpha(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_{i=1}^{n} (w_i)^\alpha;$$

– *вариабельность* весов $\boldsymbol{w}$ [30]

$$D(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (w_i - \bar{w})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^2 - \frac{1}{n^2},$$

где $\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{1}{n}$;

– s-й момент вектора весов $\boldsymbol{w}$, $s \in \mathbb{N}$ [26]

$$\mu_s(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^s.$$

С другой стороны, для определения некоторого усредненного значения веса могут использоваться следующие формулы:

$$\mu_{1/s}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[s]{w_i} \text{ и } \mu_{-s}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i}.$$

Поскольку считается, что оптимистическая позиция предполагает дизъюнктивное агрегирование, а пессимистическая – конъюнктивное, то величиной $orness(\boldsymbol{w})$ можно оценивать отношение к риску: чем ближе $orness(\boldsymbol{w})$ к 1, тем в большей степени позиция субъекта, участвующего в процессе агрегирования, является оптимистической, и тем в большей степени он склонен к риску. Наличие компенсационных свойств (малые значения частных оценок по одним показателям компенсируются большими значениями оценок по другим показателям) также можно оценить показателем $orness(\boldsymbol{w})$, поскольку $\max$ соответствует случаю полной компенсации (в этом случае $orness(\boldsymbol{w}^*) = 1$). Заметим, что перечисленные числовые характеристики зависят от количества n частных оценок – аргументов OWA-оператора, поэтому с увеличением n стратегия агрегирования, отношение к риску, а также уровень компенсационных свойств могут меняться.

В отличии от показателя $orness$, который был рассмотрен выше, в [31] введено понятие его нечеткого варианта $orness^{fuz}$, который определяется следующим образом:

$$orness^{fuz}(\boldsymbol{w}) = \max_{i=\overline{1,n}} \min\left\{\frac{n-i}{n-1}, \sum_{j=1}^{i} w_j\right\},$$

причем вместо $\max$ и $\min$ могут использоваться другие операции типа сложения и умножения.

В [31] отмечается, что введенный показатель является более подходящим инструментом для моделирования поведения лица, принимающего решения, поскольку представляет некоторую дополнительную информацию. Пусть, например, заданы два вектора весов

$$\boldsymbol{w}^1 = (0.25, 0, 0, 0.75),$$

$$\boldsymbol{w}^2 = (0.05, 0.15, 0.3, 0.5).$$

Легко вычислить, что $orness(\boldsymbol{w}^1) = orness(\boldsymbol{w}^2) = 0.25,$ но

$$orness^{fuz}\left(\boldsymbol{w}^1\right) = 0.25,\ orness^{fuz}\left(\boldsymbol{w}^2\right) = 0.33.$$

В рассмотренном примере первый набор весов исключает второй и третий показатель, в то время как во втором наборе каждому показателю назначается ненулевой вес. Очевидно, что уровень проявления компенсационных свойств во втором случае будет выше. Этот факт лучше позволяет выявить $orness^{fuz}$.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУР АГРЕГИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ OWA-ОПЕРАТОРОВ

Наличие целого спектра числовых характеристик OWA-операторов позволяет осуществить моделирование процедуры агрегирования с учетом различных требований и желательных свойств, при этом формирование подходящей модели сводится к определению вектора весов $\boldsymbol{w}$. В данном разделе рассматриваются различные подходы к формированию вектора весов для OWA-операторов.

В [26, 32] предложен подход, согласно которому вектор весовых коэффициентов определяется на основе лингвистических кванторов, соответствующих принципу «нечеткого большинства» – таких как *большинство, как можно больше, по крайней мере половина* и т. д. Формально такие кванторы задаются с помощью функций квантификации $Q : \mathbb{N} \cup \{0\} \to [0,1]$ или $Q : [0,1] \to [0,1],$ которые можно рассматривать как нечеткие подмножества соответствующих универсальных множеств, ставящие каждому неотрицательному числу или доле степень, с которой это число соответствует данному лингвистическому квантору. В контексте агрегирования лингвистический квантор описывает приближенное количество частных оценок, которые будут учтены в обобщенной оценке. Как правило, подразумевается, что функция квантификации, формализующая понятие «нечеткого большинства», является непрерывной, неубывающей, $Q(0) = 0,$ и существует хотя бы одно значение $x^*,$ для которого $Q(x^*) = 1.$

Если задана функция квантификации $Q : [0,1] \to [0,1],$ то, согласно [32], весовые коэффициенты определяются следующим образом:

$$w_1 = Q\left(\frac{1}{n}\right), w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)\left(i = \overline{2,n}\right).$$

Если функция квантификации задана на множестве $\mathbb{N} \cup \{0\},$ то

$$w_1 = Q(0) = 0, w_i = Q(i) - Q(i-1)\left(i = \overline{2,n}\right).$$

Заметим, что в обоих случаях условие нормировки для весов выполняется автоматически. Учитывая, что в правую часть полученных выражений входит функция Q, будем считать $orness(\boldsymbol{w}) = orness(Q)$ равносильными обозначениями.

Величина *orness* вычисляется по формулам

$$orness(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)\left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}Q\left(\frac{i}{n}\right)$$

или

$$orness(Q) = \int_0^1 Q(x)\,dx.$$

Имеет место следующее утверждение [32]: пусть $Q_1, Q_2 : [0,1] \to [0,1]$ – функции квантификации, такие что для любого $x \in [0,1]$ выполняется неравенство $Q_1(x) \le Q_2(x),$ тогда $orness(Q_1) \le orness(Q_2).$

Рассмотрим следующие функции квантификации:

$$Q_1(x) = \begin{cases} 0, x = 0; \\ 1, x \in (0,1], \end{cases} \quad Q_2(x) = \begin{cases} 1, x = 0; \\ 0, x \in (0,1], \end{cases}$$

$$Q(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, 0.5); \\ 0.5, x = 0.5; \\ 1, x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что на основе первых двух функций можно определить векторы $\boldsymbol{w}^*$ и $\boldsymbol{w}_*$ соответственно, в третьем случае получим вектор, который соответствует медиане $F_{w^m}(\boldsymbol{x}) = Median\{x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}\}$ с компонентами [33]

$$w_i^m = \begin{cases} 0.5, \textit{ если } i = \dfrac{n+1}{2} \textit{ при } n \textit{ нечетном} \\ \quad \textit{или } i = \dfrac{n}{2} \textit{ и } i = \dfrac{n}{2}+1 \textit{ при } n \textit{ четном}; \\ 0, \textit{ иначе}. \end{cases}$$

За счет выбора функции квантификации Q, генерирующей вектор весовых коэффициентов, можно управлять отношением к риску, уровнем компенсационных свойств и другими характеристиками OWA-операторов. Исследование различных типов кванторов представлено, например, в [26, 27, 32–34].

В качестве функции квантификации, формализующей кванторы *большинство*, *много*, *как можно больше* и т. п., используются степенные функции $Q_\alpha(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 1)$, при этом $orness(Q_\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$ [35]. Тогда при $\alpha = 1$, получим вектор весов $\boldsymbol{w}_\Delta = \left(\dfrac{1}{n},...,\dfrac{1}{n}\right)$, а соответствующий OWA-оператор является средним арифметическим. При $\alpha = 2$ получим, что весовые коэффициенты имеют вид $w_i = \dfrac{2i-1}{n^2}$ $(i = \overline{1,n})$, а величина

$$andness(Q_2) = 1 - orness(Q_2) = 1 - \frac{1}{3} \approx 0.67$$

свидетельствует о том, что соответствующий OWA-оператор является квазиконъюнкцией. Можно сделать вывод, что с помощью функции квантификации Q_α моделируются OWA-операторы, реализующие конъюнктивную стратегию.

Пусть функция квантификации Q является строго возрастающей и дифференцируемой (соответствующие лингвистические кванторы называются Regular Increasing Monotonic – RIM-кванторы), тогда, согласно [36], весовые коэффициенты можно найти по формуле

$$w_i = \frac{Q'(1-y_i)}{\sum_{j=1}^{n} Q'(1-y_j)},$$

где Q' – производная функции квантификации Q; $\boldsymbol{y} = (y_1,...,y_n)$ – вектор, полученный из $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$ упорядочением элементов по невозрастанию. Как можно заметить, в этом случае наблюдается попытка сделать акцент и на значения аргументов, и на их порядок, поскольку формула содержит упорядоченные аргументы y_i. Таким образом, при агрегировании аргументы векторной оценки $\boldsymbol{x}$ упорядочены по невозрастанию, а в формулах для w_i используется их обратный порядок, поскольку, если $y_1 \geq ... \geq y_n$, то $1-y_1 \leq ... \leq 1-y_n$. Функция агрегирования в этом случае будет иметь следующий вид:

$$A_{RIM}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q'(1-y_i)}{\sum_{j=1}^{n} Q'(1-y_j)} \cdot y_i =$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} Q'(1-y_j)} \sum_{i=1}^{n} Q'(1-y_i) \cdot y_i =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} Q'(1-x_i) \cdot x_i}{\sum_{j=1}^{n} Q'(1-x_j)}.$$

В [37] для определения весов используются функция следующего вида:

$$Q_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 0, \textit{ если } 0 \leq x < \alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \textit{ если } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1, \textit{ если } x > \beta, \end{cases}$$

которая для заданных параметров $\alpha, \beta \in [0,1]$ и $\alpha < \beta$ также формализует квантор «нечеткого большинства», но на некотором промежутке $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$. В общем случае весовые коэффициенты определяются по следующим формулам:

$$w_i = \begin{cases} 0, \textit{ если } 1 \leq i \leq \alpha n; \\ \dfrac{i-\alpha n}{n(\beta-\alpha)}, \textit{ если } \alpha n < i \leq \alpha n + 1; \\ \dfrac{1}{n(\beta-\alpha)}, \textit{ если } \alpha n + 1 < i < \beta n; \\ \dfrac{\beta n + 1 - i}{n(\beta-\alpha)}, \textit{ если } \beta n \leq i < \beta n + 1; \\ 0, \textit{ если } \beta n + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

OWA-оператор $A_{\alpha,\beta}$, ассоциированный с данным набором весов, называется *EVROWA-оператором* (OWA based on Extreme Values Reductions).

Анализируя формулу для w_i, можно сделать вывод, что EVROWA-оператор будет игнорировать первые αn и последние $n-(\beta n+1)$ значений, а, следовательно, в обобщенной оценке не учитываются максимальные и минимальные значения аргументов, а внимание акцентируется лишь на тех частных оценках, которые соответствуют средним значениям.

Здесь также возможны случаи, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 1$.

Заметим, что вместо линейной функции на $[\alpha,\beta]$ может использоваться подходящая нелинейная функция, но в любом случае, получим, что при любом $i \le \alpha n$ и любом $i \ge \beta n+1$ $w_i = 0$.

В качестве нелинейных функций квантификации для EVR-OWA-операторов можно использовать, например, следующую функцию:

$$Q_{\alpha,*}(x) = x + \alpha\cdot\sin(2\pi x - \pi),$$

где $\alpha \in \left(0,\dfrac{1}{2\pi}\right)$, $x \in [0,1]$.

В этом случае не будут учитываться максимальные значения аргументов, при этом параметр α регулирует количество таких оценок.

В [37] показано, что всегда $orness(A_{\alpha,\beta}) = 0.5$.

Задача моделирования процедур агрегирования с использованием OWA-операторов, по сути, сводится к определению вектора весов $\boldsymbol{w}$, который оптимизирует значения выбранных числовых характеристик, например, при фиксированной стратегии агрегирования или постулировании каких-либо других свойств процедуры агрегирования.

Рассмотрим OWA-операторы со следующими векторами весов: $\boldsymbol{w}^1 = (0,0,1,0,0)$ и $\boldsymbol{w}^2 = (0.2,0.2,0.2,0.2,0.2)$. Вычислим

$$orness\left(\boldsymbol{w}^1\right) = orness\left(\boldsymbol{w}^2\right) = 0.5,$$

$$H\left(\boldsymbol{w}^1\right) = 0,\ H\left(\boldsymbol{w}^2\right) = 1.$$

Заметим, что при одинаковых значениях характеристики *orness* в первом случае при агрегировании будет учитываться значение только третьего аргумента, а во втором случае в равной мере будут приняты во внимание все аргументы векторной оценки. Поэтому возникает задача нахождения такого вектора весов, который при фиксированном значении *orness* оптимизирует, например, энтропийные или другие характеристики OWA-оператора. В некоторых случаях это можно сделать за счет настройки параметров. Например, известно, что для EVROWA-операторов величина *orness* всегда равна 0.5, но, варьируя значениями параметров α и β можно достичь желаемого значения энтропии [37]. Так, если в качестве функции квантификации взять

$$Q_{\alpha,*}(x) = \begin{cases} 0.5\left(1-(1-2x)^{\frac{1}{\alpha}}\right), \text{если } 0 \le x < 0.5; \\ 0.5\left(1+(1-2x)^{\frac{1}{\alpha}}\right), \text{если } 0.5 \le x \le 1, \end{cases}$$

где $\alpha > 1$, то с увеличением α энтропия уменьшается (например, если $n = 100$, то при $\alpha = 1$ энтропия равна 4.605, а при $\alpha = 10$ энтропия равна 2.4379).

В некоторых случаях вектор весов находится как решение уравнения или системы уравнений. Так, в [31] предложен метод нахождения вектора весов $\boldsymbol{w}$, для которого задана величина $orness^{fuz}(\boldsymbol{w}) = \alpha$. Доказано утверждение, согласно которому, для каждого OWA-оператора с вектором весов $\boldsymbol{w} = (w_1,\ldots,w_n)$ существует целое число $m \in \{1,\ldots,n-1\}$, такое что

$$orness^{fuz}(\boldsymbol{w}) = \max\left\{\frac{n-(m+1)}{n-1}, \sum_{j=1}^{m} w_j\right\},$$

при этом m, возможно, не единственное. Тогда предположив, что $\sum_{j=1}^{m} w_j = \alpha$, можно определить количество ненулевых весов $m = \lfloor n - \alpha(n-1)\rfloor$, где $\lfloor\cdot\rfloor$ обозначает floor-функцию. Для нахождения вектора весов составляется специальная система ограничений с учетом перехода от OWA-оператора с m ненулевыми весами к эквивалентному OWA-оператору [38], для которого веса определяются правилом

$$w_k = \begin{cases} w_1 - (k-1)d, \text{ если } w_1 - (k-1)d > 0, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Для нахождения k ненулевых весов решается следующая система:

$$\begin{cases} w_2 = w_1 - d = 1 - \alpha, \\ kw_1 - 0.5k(k-1)d = 1, \\ w_1 - (k-1)d > 0, \\ w_1 - kd \le 0. \end{cases}$$

В [37] приведен следующий пример. Пусть $n = 10$ и $orness^{fuz}(\boldsymbol{w}) = 0.75$. Сначала определяется число $m = 3$, которое означает, что $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. Затем составляется система приведенного выше вида для нахождения k ненулевых весов. Решая ее, получим $k = 6$, $w_1 = \dfrac{11}{36}$, $d = \dfrac{1}{18}$. На основе найденных значений определяется вектор весов

$$\boldsymbol{w} = \left(\frac{11}{36}, \frac{9}{36}, \frac{7}{36}, \frac{5}{36}, \frac{3}{36}, \frac{1}{36}, 0, 0, 0, 0\right).$$

В [27] показано, что в качестве вектора весов $\boldsymbol{w}$, обеспечивающего максимальную энтропию $H(\boldsymbol{w})$ при заданном значении $orness(\boldsymbol{w}) = \rho$ можно использовать вектор

$$\left(\frac{t^0}{s}, \frac{t^1}{s}, \ldots, \frac{t^{n-1}}{s}\right),$$

где $s = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$, $t \in R_+$.

OWA-операторы с максимальным значением энтропии образуют семейство *MEOWA-операторов* (Maximum Entropy OWA operators) [27].

Пусть $n = 3$, тогда вектор весов будет иметь вид

$$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{1}{1+t+t^2}, \frac{t}{1+t+t^2}, \frac{t^2}{1+t+t^2}\right).$$

Зададим значение $orness(\boldsymbol{w}) = \rho$, тогда $andness(\boldsymbol{w}) = 1 - \rho$. Составим уравнение

$$\frac{1}{2}\left(0 \cdot \frac{1}{1+t+t^2} + 1 \cdot \frac{t}{1+t+t^2} + 2 \cdot \frac{t^2}{1+t+t^2}\right) = 1 - \rho,$$

которое равносильно уравнению

$$(\rho - 1)t^2 + \left(\rho - \frac{1}{2}\right)t + \rho = 0.$$

Можно показать, что оно всегда имеет два корня разных знаков

$$t_{1,2} = \frac{-\left(\rho - \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 - 4(\rho - 1)\rho}}{2(\rho - 1)}.$$

Положительный корень дает значение t, и на его основе можно найти все веса w_i, причем найденный вектор весов будет иметь максимальную энтропию на множестве всевозможных наборов весовых коэффициентов. Например, задав $\rho = 0.8$, получим $t_1 = -1.386$, $t_2 = 2.886$, тогда вектор весов имеет вид $\boldsymbol{w} = (0.083, 0.236, 0.681)$, при этом значение энтропии равно 0.7345.

В [35] предложен следующий подход для определения весов на основе некоторого изначально заданного значения параметра $\alpha \in [0,1]$:

$$w_1 = \alpha,\ w_2 = \alpha(1-\alpha),$$
$$\ldots,$$
$$w_{n-1} = \alpha(1-\alpha)^{n-2},\ w_n = (1-\alpha)^{n-1}.$$

Легко видеть, что данное множество весов можно задать рекурсивно в виде

$$w_1 = \alpha \in [0,1],$$
$$w_i = w_{i-1}(1 - w_1)\ \left(i = \overline{2, n-1}\right),$$
$$w_n = w_{n-1}(1 - w_1) / w_1.$$

OWA-операторы, для которых весовые коэффициенты определяются описанным выше способом, называются *экспоненциальными*. Для них

$$orness\left(\boldsymbol{w}^{(n+1)}\right) = \frac{n-1}{n} orness\left(\boldsymbol{w}^{(n)}\right) + \frac{1}{n}\left(1 - \left(orness\left(\boldsymbol{w}^{(n)}\right) + w_{n+1}\right)\right),$$

где $\boldsymbol{w}^{(n)}$, $\boldsymbol{w}^{(n+1)}$ – векторы весов с n и $n+1$ компонентами соответственно.

Заметим, что при увеличении n величина *orness* возрастает. Экспоненциальные OWA-операторы, для которых $orness(\boldsymbol{w}) > \alpha$, называют *оптимистическими*. Если же выполняется соотношение $orness(\boldsymbol{w}) < \alpha$, то такие операторы называют *пессимистическими*.

В [28] рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих построение экспоненциальных

OWA-операторов. Так при $n=5$ и $orness(\boldsymbol{w})=0.6$ на основе представленной выше функциональной зависимости найдено значение $\alpha=0.8$. Подставляя это значение в формулы для весовых коэффициентов, получим вектор весов $\boldsymbol{w}=(0.41, 0.1, 0.13, 0.2, 0.16)$ с $orness(\boldsymbol{w})=0.5704$.

Наибольшее распространение получили подходы, когда вектор весов определяется на основе решения оптимизационных задач. Рассмотрим задачу нахождения вектора весовых коэффициентов $\boldsymbol{w}$ при заданном уровне компенсации $orness(W)=\rho\in[0,1]$. Ограничения соответствующей задачи в общем случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)\cdot w_i=\rho, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i=1,\ w_i\in[0,1]\left(i=\overline{1,n}\right). \end{cases}$$

Можно рассматривать несколько типов целевых функций, которые реализуют определенные принципы.

Принцип максимальной энтропии порождает семейство операторов MEOWA при использовании в качестве целевой следующих функций:

1) $H(\boldsymbol{w})=-\sum_{i=1}^{n} w_i\log_2 w_i\to\max$

(максимизация энтропии Шеннона [39]);

2) $H_\alpha(\boldsymbol{w})=\log_2\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^\alpha\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\to\max$

(максимизация энтропии Реньи [40]);

3) $D^2(\boldsymbol{w})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i-\dfrac{1}{n}\right)^2\to\min$

(минимизация суммарного отклонения весов w_i от их среднего значения $\dfrac{1}{n}$ [30]).

Принцип моментов, согласно которому можно пренебречь одними оценками, чтобы подчеркнуть другие при заданном уровне компенсации, предполагает решение задачи с целевой функцией вида

$$\mu_s(\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{n} w_i^s\to\min,$$

минимизирующей суммарные моменты s-го порядка вектора весов W, $s\in\mathbb{N}$. В данной задаче также могут использоваться моменты дробной или отрицательной степени.

Рассмотрим подробнее задачу с целевой функцией в форме $H_\alpha(\boldsymbol{w})$ [40].

При $n=2$ получим $\boldsymbol{w}=(\rho,1-\rho)$. Если $\rho\in\{0,1\}$, то $\boldsymbol{w}_*=(0,\ldots,1)$ или $\boldsymbol{w}^*=(1,\ldots,0)$ соответственно для любого n со значением энтропии, равным 0 для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\alpha\neq 0$.

Без потери общности можно считать, что $\rho\in[0,0.5]$, так как если вектор $\boldsymbol{w}$ является решением задачи для некоторого значения $\rho\in[0,0.5]$, то вектор $\boldsymbol{v}$ с обратным порядков весов является оптимальным для $orness(W)=1-\rho$, так как энтропия $H_\alpha(\boldsymbol{w})$ симметрична относительно вектора весов.

При $\alpha=1$ задача сводится к решению уравнения

$$w_1\left((n-1)\cdot\rho+1-n\cdot w_1\right)^n=$$
$$=\left((n-1)\cdot\rho\right)^{n-1}\left(\left((n-1)\cdot\rho-n\right)\cdot w_1+1\right)$$

относительно w_1, на основе которого определяются все остальные веса

$$w_n=\frac{\left((n-1)\rho-n\right)\cdot w_1+1}{(n-1)\cdot\rho+1-n\cdot w_1},$$
$$w_j=\sqrt[n-1]{w_1^{n-j}\cdot w_n^{j-1}}\ \left(j=\overline{2,n-1}\right).$$

В общем случае задача преобразуется к виду со стандартными ограничениями и целевой функцией $\sum_{i=1}^{n} w_i^\alpha\to\min$. Для ее решения используется метод множителей Лагранжа и условия оптимальности Куна-Таккера, что позволяет получить весовые коэффициенты в аналитическом виде. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=\sum_{i=1}^{n}(w_i)^\alpha+\lambda_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{n-1}w_i-\rho\right)+$$
$$+\lambda_2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} w_i-1\right)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i w_i,$$

где векторы $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)$ и $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ такие, что $\mu_i\geq 0$ $(\mu_i\cdot w_i=0)$, $i=\overline{1,n}$.

Если $n\geq 3$, то веса определяются по формуле

$$w_i=\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{n-i}{n-1}\lambda_1+\lambda_2\right)\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}\ \left(i=\overline{1,n}\right),$$

где $(\cdot)_+$ – положительный корень.

Обозначим $\varphi_i = \dfrac{n-i}{n-1}\lambda_1 + \lambda_2$, тогда в [35] рассматриваются следующие случаи:

a) $\{\varphi_i\}$ – последовательность при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$, тогда $w_i = \dfrac{1}{n}$;

b) $\{\varphi_i\}$ – монотонно возрастающая последовательность при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, тогда $0 = w_1 = \ldots = w_{k-1} < w_k < \ldots < w_n$;

c) $\{\varphi_i\}$ – монотонно возрастающая последовательность при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < -\lambda_1$, тогда $w_1 > \ldots > w_k > w_{k+1} = \ldots = w_n = 0$.

В ряде работ для порождения вектора весов предлагается использовать известные последовательности, причем оказывается, что они оптимизируют некоторые числовые характеристики.

Проблемы, связанные с энтропией, рассматриваются в работах, связанных с оценкой вероятностных распределений в условиях неопределенности. В тех случаях, когда вектор весов можно интерпретировать как вектор априорного распределения вероятностей, и о них не известно ничего, кроме приоритетов в форме отношения порядка, можно использовать последовательности Фишберна [41], при этом необходимо определиться с типом отношения порядка. В [41, 42] представлены следующие способы нахождения весов при различных гипотезах об их порядке относительно друг друга:

a) если $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$, то

$$w_i = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)} \left(i = \overline{1,n}\right)$$

(арифметическая прогрессия Фишберна);

b) если $w_i \geq \sum\limits_{j=i+1}^{n} w_j \left(i = \overline{1,n-1}\right)$, то

$$w_i = \frac{2^{n-i}}{2^n - 1} \left(i = \overline{1,n}\right)$$

(геометрическая прогрессия Фишберна).

Если в гипотезах порядок меняется на противоположный, то формулы корректируются следующим образом:

$$w_i = \frac{2i}{n(n+1)} \text{ и } w_i = \frac{2^{i-1}}{2^n - 1}.$$

Очевидно, что веса, найденные по приведенным выше формулам, удовлетворяют условию нормировки и принадлежат промежутку $[0,1]$. Отмечается, что арифметическая прогрессия Фишберна обеспечивается большее значение энтропии, чем геометрическая.

В [41] предложен метод построения упорядоченной последовательности весов на основе некоторой другой монотонной последовательности неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$, которая называется *производящей*. Согласно [42], последовательность с элементами

$$w_i = \frac{a_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \left(i = \overline{1,n}\right),$$

называемая *последовательностью Фишберна*, определяет вектор весовых коэффициентов. В качестве производящей последовательности можно использовать некоторую прогрессию натуральных чисел, числа Фибоначчи, числа Мерсенна и другие. Поскольку при использовании OWA-операторов компоненты векторной оценки упорядочиваются по невозрастанию или по неубыванию, то в качестве производящей последовательности можно взять вектор $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, который представляет собой упорядоченную векторную оценку $\boldsymbol{x}$. В [35] отмечается, что такой подход обеспечивает нахождение вектора весов с максимальным значением энтропии.

В [21, 33] предложено несколько подходов для нахождения весов, зависящих от некоторого параметра $\alpha > 0$, с учетом значений аргументов:

a) $w_i = \dfrac{y_i^\alpha}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^\alpha} \left(i = \overline{1,n}\right)$;

b) $w_i = \dfrac{\left(\dfrac{1}{y_i}\right)^\alpha}{\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{1}{y_j}\right)^\alpha} \left(i = \overline{1,n}\right)$;

c) $w_i = \dfrac{(1-y_i)^\alpha}{\sum\limits_{j=1}^{n} (1-y_j)^\alpha} \left(i = \overline{1,n}\right)$.

3. СВЯЗЬ OWA-ОПЕРАТОРОВ С НЕЧЕТКИМИ МЕРАМИ

Хотя семейство средних отличается простотой вычислений и высоким уровнем интерпретируемости относительно различных свойств, принадлежащие ему функции агрегирования не позволяют адекватно моделировать взаимодействие между аргументами (показателями, критериями). Для преодоления данного недостатка было предложено обобщение аддитивных мер – нечеткие меры.

Пусть $X = \{1,...,N\}$ – конечное множество, $\beta(X)$ – его булеан, включающий 2^N подмножеств. Нечеткой дискретной мерой на X называется функция множества $\mu : \beta(X) \to [0,1]$ со следующими свойствами [42]: i) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$; ii) если $A \subset B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$ для $A, B \in \beta(X)$.

Мера μ называется симметричной, если для любых $A, B \in \beta(X)$, таких что $|A| = |B|$, имеем $\mu(A) = \mu(B)$.

Примером нечеткой меры является неаддитивная мера Сугено μ^λ или λ-мера, которая строится по следующему правилу: пусть $A, B \in \beta(X)$ и $A \cap B = \varnothing$, тогда

$$\mu^\lambda(A \cup B) = \mu^\lambda(A) + \mu^\lambda(B) + \lambda\mu^\lambda(A)\mu^\lambda(B),$$

где $\lambda > -1$ вычисляется из уравнения

$$1 + \lambda = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \lambda\mu(A_i)\right).$$

Пусть μ – нечеткая мера, $C = \{c_1,...,c_n\}$ – множество показателей (или множество источников информации), по которым получены оценки $x_1,...,x_n$.

Согласно [42], дискретный интеграл Сугено для вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$ по мере μ определяется формулой

$$Sugeno_\mu(\boldsymbol{x}) = \max_{i=1,n} \min\left\{x_{\sigma(i)}, \mu\left(C_{\sigma(i)}\right)\right\},$$

где σ – перестановка значений $x_1,...,x_n$ такая, что $x_{\sigma(1)} \le ... \le x_{\sigma(n)}$ и $C_{\sigma(i)} = \{c_{\sigma(i)},...,c_{\sigma(n)}\}$.

На основе интеграла Сугено получаются операторы [14]

$$\mathrm{OWMAX}_w(\boldsymbol{x}) = \max_i \min\{w_i, x_i\},$$

$$\mathrm{OWMIN}_{w'}(\boldsymbol{x}) = \min_i \max\{w'_i, x_i\},$$

где $x_i, w_i, w'_i \in [0,1]$, $1 = w_1 \ge ... \ge w_n$ и $w'_1 \ge ... \ge w'_n = 0$.

Заметим, что в приведенных определениях вместо max и min можно использовать треугольные нормы T и конормы S [13].

Дискретный интеграл Шоке для вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$ по мере μ определяется следующим образом [23, 44]:

$$Choq_\mu(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right) \cdot \mu\left(C_{\sigma(i)}\right),$$

где σ – перестановка значений $x_1,...,x_n$ такая, что $x_{\sigma(1)} \le ... \le x_{\sigma(n)}$, $x_{\sigma(0)} = 0$, и $C_{\sigma(i)} = \{c_{\sigma(i)},...,c_{\sigma(n)}\}$.

Для интеграла Шоке используется эквивалентное представление

$$Choq_\mu(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} \cdot \left(\mu\left(C_{\sigma(i)}\right) - \mu\left(C_{\sigma(i+1)}\right)\right),$$

где $C_{\sigma(n+1)} = \varnothing$ (в этом $x_{\sigma(1)} \ge ... \ge x_{\sigma(n)}$).

Заметим, что нечеткие интегралы Сугено и Шоке отображают вектор в скалярную величину, поэтому могут рассматриваться как операторы агрегирования. В отличии от аддитивных функций агрегирования они позволяют учитывать взаимодействие аргументов. В [28, 45–47] представлены примеры их использования. Они являются монотонными, непрерывными, идемпотентными операторами с компенсационными свойствами.

В [23, 44] отмечается, что OWA-оператор является частным случаем интеграла Шоке: пусть μ – мера, $F_{\boldsymbol{w}}$ – OWA-оператор, ассоциированный с вектором весов $\boldsymbol{w} = (w_1,...,w_n)$, тогда $F_{\boldsymbol{w}}$ есть интеграл Шоке по мере μ тогда и только тогда, когда μ симметрична и $w_i = \mu(C_i) - \mu(C_{i-1})$, где $C_i \in \beta(X)$, причем $|C_i| = i$, $C_0 = \varnothing$. В [44] отмечается, что в этом случае нечеткая мера μ задается в виде

$$\mu(C_i) = \sum_{j=1}^{i} w_j$$

для любого множества C_i мощности $|C_i| = i$.

В [31] получена интерпретация показателей *orness* и *orness*^{fuz} с помощью интегральных представлений: пусть $\boldsymbol{w} = (w_1,...,w_n)$ – вектор весов некоторого OWA-оператора; $\mu : \beta(X) \to [0,1]$ – аддитивная нечеткая мера, генерируемая весами по правилу $\mu(\{i\}) = w_i$; функция $g : \mathbb{N} \to [0,1]$ определяется следующим образом: $g(i) = \dfrac{n-i}{n-1}$ $(i = \overline{1,n})$, тогда

$$Choq_{\mu}(\boldsymbol{g}) = orness(\boldsymbol{w}),$$

$$Sugeno_{\mu}(\boldsymbol{g}) = orness^{fuz}(\boldsymbol{w}).$$

В [14] предлагаются оригинальные операции порядкового агрегирования, основанные на мерах. Для любой функции агрегирования A существует взвешенная функция агрегирования $A_{\boldsymbol{w}}$, ассоциированная с вектором весов $\boldsymbol{w}$ и определяемая следующим образом:

$$A_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}\right) \cdot A\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(i)}\right),$$

где $w_{\sigma(1)} \geq ... \geq w_{\sigma(n)}$ и $w_{n+1} = 0$.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Полагая $A = \max$ или $A = \min$, получим взвешенные формы этих операторов

$$\max_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}\right) \times$$

$$\times \max\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(i)}\right),$$

$$\min_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}\right) \times$$

$$\times \min\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(i)}\right).$$

4. ОБОБЩЕНИЯ И МОДИФИКАЦИИ OWA-ОПЕРАТОРОВ

Порождение новых семейств OWA-операторов обусловлено различными факторами, среди которых отметим следующие:

– ориентация на обработку определенного типа информации (например, лингвистической [12]), в условиях, когда значения аргументов не известны, но задано вероятностное распределение их значений [48]; при наличии специальных ограничений на агрегирование [20, 49]);

– комбинирование с известными методами обработки информации (например, в методах принятия решений [14, 45, 46, 50]; при агрегировании если-то правил в нечетких системах [51]);

– при использовании специальных функций трансформации, порождающих новые функции агрегирования на основе выбранных базовых функций, обладающих рядом важных для организации процедуры агрегирования свойств [3, 5, 14].

Рассмотрим некоторые распространенные семейства OWA-операторов.

4.1. Лингвистический OWA-оператор

Специальные типы OWA-операторов появляются в различных приложениях, ориентированных на обработку информации специального вида. В [12] введен лингвистический OWA-оператор. В этом случае предполагается, что частные оценки формируются в заранее определенной лингвистической шкале. Например, такая шкала может иметь следующий вид:

$$S = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\},$$

где S_0 – *None* (N) – *несущественный,* S_1 – *Very Low* (VL) – *очень низкий;* S_2 – *Low* (L) – *низкий;* S_3 – *Medium* (M) – *средний;* S_4 – *High* (H) – *высокий;* S_5 – *Very High* (VH) – *очень высокий;* S_6 – *Perfect* (P) – *значительный.* С учетом введенных обозначений лингвистическая шкала примет вид

$$S = \{N,\ VL,\ L,\ M,\ H,\ VH,\ P\}.$$

Пусть $\underline{\boldsymbol{a}} = (a_1, ..., a_n)$ – векторная оценка, $a_i \in S$ $(i = \overline{1,n})$. *Лингвистический OWA-оператор* (LOWA-оператор), ассоциированный с вектором весов $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$, где $w_i \in [0,1]$ и $\sum_{i=1}^{n} w_1 = 1$, определяется правилом

$$\Phi_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{a}) = C^n\left\{\left(w_k, b_k\right), k = \overline{1,n}\right\} = w_1 \otimes b_1 \oplus$$

$$\oplus \left(1 - w_1\right) \otimes C^{n-1}\left\{\left(\lambda_k, b_k\right), k = \overline{2,n}\right\},$$

где $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n)$ – вектор, полученный из векторной оценки $\boldsymbol{a}$ упорядочением по невозрастанию лингвистических термов; $\lambda_k = \dfrac{w_k}{\sum_{m=2}^{n} w_m}$ $(k = \overline{2,n})$ – нормированный вектор весов, полученный после удаления максимального веса w_1, $\sum_{m=2}^{n} \lambda_m = 1$; C^n, C^{n-1} – выпуклые комбинации $n(n-1)$ термов соответственно.

Для двух термов выпуклая комбинация определяется правилом

$$C^2\left\{\left(w_1, b_1\right), \left(w_2, b_2\right)\right\} = w_1 \otimes b_1 \oplus w_2 \otimes b_2 = S_k,$$

где $b_1 = S_j$ и $b_2 = S_i$ $(j \geq i)$; $k = \min\{T, i + round(w_1 \cdot (j-i))\}$; операция *round* соответствует округлению, T – индекс последнего терма в выбранной лингвистической шкале.

Для LOWA-оператора вектор весов W формируется также, как и для OWA.

Рассмотрим пример. Предположим, что, оценивая некоторый объект по четырем показателям, эксперт сформировал векторную оценку $\boldsymbol{a} = (VL, VH, VH, M)$, т. е. по первому показателю оценка *очень низкая*, а по второму и третьему – *очень высокая*, а по четвертому – *средняя*. Требуется построить некоторую усредненную оценку в шкале S.

На основе квантора *большинство*, задаваемого функцией квантификации $Q(x) = x^2$, найдем вектор весов $\boldsymbol{w} = \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}\right)$. В соответствии с определением LOWA, определим $\boldsymbol{b} = (VH, VH, M, VL)$, упорядочивая вектор $\boldsymbol{a}$ по невозрастанию с учетом интерпретации термов.

На основе определения LOWA получим

$$\Phi_{\boldsymbol{w}}(A) =$$

$$C^4\left\{\left(\frac{1}{16}, VH\right), \left(\frac{3}{16}, VH\right), \left(\frac{5}{16}, M\right), \left(\frac{7}{16}, VL\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{16} \otimes VH \oplus \frac{15}{16} \oplus$$

$$\otimes C^3\left\{\left(\frac{3}{15}, VH\right), \left(\frac{5}{15}, M\right), \left(\frac{7}{15}, VL\right)\right\}.$$

Здесь веса в C^3 получены путем нормирования, т. е. делением каждого весового коэффициента на $\frac{15}{16}$. Аналогично поступаем и в других случаях.

Теперь распишем C^3.

$$C^3\left\{\left(\frac{3}{15}, VH\right), \left(\frac{5}{15}, M\right), \left(\frac{7}{15}, VL\right)\right\} =$$

$$= \frac{3}{15} \otimes VH \oplus \frac{12}{15} \otimes C^2\left\{\left(\frac{5}{12}, M\right), \left(\frac{7}{12}, VL\right)\right\}.$$

Найдем

$$C^2\left\{\left(\frac{5}{12}, M\right), \left(\frac{7}{12}, VL\right)\right\} =$$

$$= \frac{5}{12} \otimes M \oplus \frac{7}{12} \otimes VL = S_k.$$

Для нахождения

$$k = \min\left\{T, i + round\left(w_1 \cdot (j-i)\right)\right\}$$

определим $j = 3$, так как $M = S_3$; $i = 1$, так как $VL = S_1$. В качестве *round* будем рассматривать обычное округление. Тогда

$$k = \min\left\{7, 1 + round\left(\frac{5}{12} \cdot (3-1)\right)\right\} =$$

$$= \min\{7, 2\} = 2.$$

Таким образом,

$$C^2\left\{\left(\frac{5}{12}, M\right), \left(\frac{7}{12}, VL\right)\right\} = S_2 = L.$$

Найденное значение C^2 подставим в C^3 и получим

$$C^3\{...\} = \frac{3}{15} \otimes VH \oplus \frac{12}{15} \otimes L = S_3 = M,$$

так как $j = 5$, $i = 2$ и

$$k = \min\left\{7, 2 + round\left(\frac{3}{15} \cdot (5-2)\right)\right\} =$$

$$= \min\{7, 3\} = 3.$$

Теперь найденное значение C^3 подставим в C^4. Определив $j = 5$, $i = 3$ и

$$k = \min\left\{7, 3 + round\left(\frac{1}{16} \cdot (5-3)\right)\right\} =$$

$$= \min\{7, 3\} = 3,$$

получим, что

$$\Phi_W(A) = \frac{1}{16} \otimes VH \oplus \frac{15}{16} \otimes M = S_3 = M.$$

Таким образом, обобщенная лингвистическая оценка объекта – *средняя* в соответствии с интерпретацией терма M. Данная оценка является более или менее разумной, поскольку векторная оценка $B = (VH, VH, M, VL)$ содержит частную оценку VL (*очень низкая*), а вектор весов определяет конъюнктивную стратегию агрегирования $(orness(\boldsymbol{w}) \approx 0.29)$.

4.2. Операторы агрегирования частных оценок, сформированных в шкале Саати

Одним из распространенных методов ранжирования объектов заданного множества на основе экспертной информации является иерархический процесс Саати [6]. Пусть имеется матрица отношения предпочтения

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ с элементами $a_{ij}\in\left\{\frac{1}{9},...,9\right\}$ из шкалы Саати. В [51] предложена функция трансформации f, осуществляющая переход от матрицы A к матрице $P=(p_{ij})_{n\times n}$ с элементами $p_{ij}=f(a_{ij})=0.5\cdot(1+\log_9 a_{ij})$, что позволяет интерпретировать матрицу P как матрицу нечеткого отношения предпочтения и применять операторы агрегирования нечеткой информации. Метод обработки матрицы парных сравнений предполагает агрегирование векторных оценок на различных этапах процедуры.

Пусть $\boldsymbol{u}=(u_1,...,u_n)$ – последовательность, задающая порядок агрегирования частных оценок x_i, представленных в шкале отношений, $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$ – вектор частных оценок. Каждое значение x_i преобразуется в $p_i=f(x_i)=\frac{1}{2}(1+\log_9 x_i)$ с помощью функции трансформации f. Рассмотрим агрегирование полученных оценок с помощью OWA-оператора

$$\sum_{i=1}^{n} w_i p_{\sigma(i)}=\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{1}{2}\left(1+\log_9 x_{\sigma(i)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i+\sum_{i=1}^{n} w_i \log_9 x_{\sigma(i)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\log_9\left(x_{\sigma(i)}\right)^{w_i}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\log_9\prod_{i=1}^{n}\left(x_{\sigma(i)}\right)^{w_i}\right).$$

На основе данного выражения в [51] введено следующее определение: n-местным *IOWG-оператором* (Induced Ordered Weighted Geometric Operators), агрегирующим последовательность аргументов $\{(u_1,x_1),...,(u_n,x_n)\}$ с вектором весов $\boldsymbol{w}$, удовлетворяющих условиям $\forall i(w_i\in[0,1])$, $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$, называется отображение $\mathrm{IOWG}:(R\times R)^n\to R$, такое, что

$$\mathrm{IOWG}\left(\left(u_1,x_1\right),...,\left(u_n,x_n\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x_{\sigma(i)}\right)^{w_i},$$

где $\sigma:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$ перестановка, такая что $u_{\sigma(i)}\ge u_{\sigma(i+1)}$ $(i=\overline{1,n-1})$.

Аналогично определяется n-местный *IOWA-оператор*

$$\mathrm{IOWA}\left(\left(u_1,x_1\right),...,\left(u_n,x_n\right)\right)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_{\sigma(i)}.$$

Заметим, что при использовании OWA-оператора перегруппировка аргументов осуществляется непосредственно на основе величин этих аргументов. В IOWA-операторах (также, как в IOWG) порядок агрегируемых компонент задается последовательностью значений $u_1,...,u_n$. Фактически аргументами таких операторов является множество пар, в которых первые элементы определяют порядок агрегирования вторых элементов. Вектор $\boldsymbol{x}$ упорядочивается в соответствии с невозрастанием вектора $\boldsymbol{u}=(u_1,...,u_n)$. Таким образом, данное семейство операторов – IOWA и IOWG – позволяет устранить один из основных недостатков порядкового взвешенного агрегирования – игнорирование важности аргументов. IOWA и IOWG обладают свойствами коммутативности и идемпотентности по второму аргументу.

4.3. Многомерные операторы агрегирования

Будем говорить [52, 53], что $\mathrm{EOWA}:\bigcup_{n\in N}[0,1]^n\to[0,1]$ есть *расширенный OWA-оператор* (Extended OWA) или *мультиOWA-оператор*, если для всех $n\ge 1$ существует n-мерный набор весов $\boldsymbol{w}^{(n)}=(w_1^n,...,w_n^n)$ такой, что

$$\mathrm{EOWA}_{\boldsymbol{w}^{(n)}}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n} w_i^n x_{\sigma(i)},$$

где $\sigma:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$ – перестановка, такая что $x_{\sigma(i)}\ge x_{\sigma(i+1)}$.

EOWA-оператор – идемпотентный, коммутативный и монотонный. Он может быть представлен с помощью весового треугольника, каждая строка которого представляет собой набор весов для конкретного значения n, причем для любого n выполняется условие нормировки $\sum_{i=1}^{n} w_i^n=1$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & w_1^2 & & w_2^2 & & \\ & w_1^3 & & w_2^3 & & w_3^3 & \\ w_1^4 & & w_2^4 & & w_3^4 & & w_4^4 \end{array}$$

Как и в случае OWA-оператора, для генерации весов может быть использована функция квантификации Q [54]

$$\forall n \geq 1 \quad \left(w_i^n = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i = \overline{1,n} \right),$$

причем

$$\sum_{i=1}^{k} w_i^n = \sum_{i=1}^{k} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) = Q\left(\frac{k}{n}\right),$$

тогда $w_i^n \in [0,1]$ и

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^n = \sum_{i=1}^{n} \left(Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) =$$

$$= Q(1) - Q(0) = 1.$$

Рассмотрим пример. Пусть функция $Q(x) = x^2$ задает квантор *большинство*, тогда веса *мультиOWA*-оператора задаются формулой $w_i^n = \dfrac{2i-1}{n^2}$, а весовой треугольник будет иметь вид

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1/4 & & 3/4 & & \\ & 1/9 & & 3/9 & & 5/9 & \\ 1/16 & & 3/16 & & 5/16 & & 7/16 \end{array}$$

Пусть $Q:[0,1] \to [0,1]$ – функция квантификации и $\{w_j^n\}$ – весовой треугольник, построенный на ее основе. Он будет симметричным тогда и только тогда, когда на множестве $[0,1]$ функция Q удовлетворяет условию $Q(1-x) = 1 - Q(x)$ для любого $x \in [0,1]$.

Весовой треугольник называется *правильным*, если

$$\forall p = \overline{1,n} \quad \left(\sum_{i=1}^{p} w_i^{n+1} \leq \sum_{i=1}^{p} w_i^n \leq \sum_{i=1}^{p+1} w_i^{n+1} \right).$$

Пусть задана последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$. На основе данной последовательности можно построить весовой треугольник для любого $n \geq 1$ по формулам

$$w_j^n = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Показано, что он является правильным тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{ \dfrac{S_{n+1}}{S_n} \right\}$, где $S_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, является невозрастающей. Например, на основе последовательности Фибоначчи можно построить весовой треугольник вида

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1/2 \quad 1/2 \\ 1/4 \quad 1/4 \quad 2/4 \\ 1/7 \quad 1/7 \quad 2/7 \quad 3/7 \\ \ldots \end{array}$$

Нетрудно показать, что выполняется неравенство $(\lambda_{n+3} - 1)(\lambda_{n+1} - 1) \leq (\lambda_{n+2} - 1)^2$, откуда следует, что последовательность $\left\{ \dfrac{S_{n+1}}{S_n} \right\}$ является невозрастающей, и, следовательно, построенный треугольник правильный.

EOWA-операторы могут использоваться в иерархических системах агрегирования [55].

4.4. КвазиOWA-операторы

В [20, 56] вводится понятие обобщенного оператора агрегирования. Пусть $f, g : [0,1] \to \to (-\infty, \infty)$ – пара непрерывных, неубывающих функций; $h : (Ran(f) \cup Ran(g)) \to [0,1]$ – другая непрерывная сюръективная функция, тогда отображение $A : [0,1]^2 \to [0,1]$, такое что

$$A(x,y) = h\big(f(x) + g(y)\big),$$

называется *обобщенным оператором агрегирования*, а тройка (f, g, h) называется *порождающей тройкой* для оператора A. В данной статье определены ограничения на функции порождающей тройки, при которых A обладает рядом важных алгебраических свойств, среди которых коммутативность, идемпотентность, наличие нейтрального элемента. Так, порождающая тройка $(a \cdot f, b \cdot g, h)$, где a, b – положительные константы, f – аддитивный генератор, такой что $h(x) = f^{-1}\left(\dfrac{x}{a+b}\right)$, соответствует идемпотентному оператору агрегирования вида

$$A(x,y) = f^{-1}\left(\frac{a \cdot f(x) + b \cdot f(y)}{a+b} \right) =$$

$$= f^{-1}\left(\frac{a}{a+b} \cdot f(x) + \frac{b}{a+b} \cdot f(y) \right).$$

Известно [20], что A является идемпотентным оператором только и только тогда, когда $f+g$ строго монотонная функция и $h=(f+g)^{-1}$.

Пусть, например, $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, тогда порождающая тройка (f,g,h) генерирует идемпотентный оператор агрегирования только если $h(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4x}-1\right)$, где $x\in[0,2]$, при этом

$$A\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4x+4y^2}-1\right)$$

(заметим, что A не обладает коммутативностью).

В [8] рассматриваются операторы агрегирования, представление которых связано с уравнением баланса. Данное представление может быть получено с помощью троек (f,g,h) при определенных типах функций f,g,h.

Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$, $h:[0,1]\to[0,\infty)$ – непрерывная, строго убывающая (строго возрастающая) функция, называемая аддитивным генератором; $h^{(-1)}$ – псевдообратная функция, которая на $[h(1),h(0)]$ $([h(0),h(1)])$ совпадает с обратной функцией h^{-1}. *КвазиOWA-оператором* называется оператор вида [57]

$$F_h\left(x\right)=h^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}w_i h\left(x_{\sigma(i)}\right)\right],$$

где $\sigma:\{1,..,n\}\to\{1,...,n\}$ – перестановка, такая, что $x_{\sigma(1)}\geq x_{\sigma(2)}\geq...\geq x_{\sigma(n)}$.

Пусть $\boldsymbol{y}=(y_1,...,y_n)$ есть вектор $\boldsymbol{x}$, упорядоченный по невозрастанию, тогда квазиOWA-оператор можно записать в виде

$$F_h\left(\boldsymbol{x}\right)=h^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}w_i h\left(y_i\right)\right].$$

Заметим, что формула F_h определяет представление ассоциативных функций. В [58, 59] описаны некоторые классы генераторов для треугольных норм и конорм, представимых рациональными функциями. Полученные результаты могут быть использованы для порождения ассоциативных функций агрегирования, в том числе квазиOWA-операторов. В табл. 1 представлены квазиOWA-операторы, полученные на основе известных генераторов треугольных норм и конорм. Заметим, что треугольные нормы и конормы используются для построения операций агрегирования с улучшенными компенсационными свойствами [15].

4.5. Композиции операторов агрегирования

При агрегировании векторных оценок сложных объектах может возникнуть одна из ситуаций, требующих использования специальных функций агрегирования:

a) необходимо принимать во внимание различные источники информации, которые формируют исходные векторные оценки (например, когда сложный объект оценивается с различных точек зрения);

b) векторная оценка содержит компоненты, представляющие данные различной природы;

c) в векторной оценке можно выделить компоненты, к которым следует применить различные стратегии агрегирования;

d) компоненты векторной оценки образуют отдельные независимые группы, соответствующие некоторым обобщенным критериям, внутри которых применение определенных типов операторов агрегирования не приводит к искажениям информации.

Для обработки такой информации используется подход, состоящий из двух шагов: сначала осуществляется агрегирование каждого набора входных данных и получение одномерной выходной величины – обобщенной оценки для каждого набора, а затем эти обобщенные оценки «сворачиваются» в единую глобальную обобщенную оценку. Данный класс операторов агрегирования определяется через стандартные операторы агрегирования и наследует многие их характеристики и свойства.

Имеет место следующее утверждение [14]: пусть $B:[0,1]^m\to[0,1]$, $A_i:[0,1]^n\to[0,1]$ для $i=\overline{1,m}$ – операции агрегирования, причем B идемпотентна, тогда их *композиция* $C_{B,A_1,...,A_m}:[0,1]^n\to[0,1]$ определяется следующим образом:

$$C_{B,A_1,...,A_m}\left(\boldsymbol{x}\right)=B\left(A_1\left(\boldsymbol{x}\right),...,A_m\left(\boldsymbol{x}\right)\right),$$

где $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$.

Так как B – идемпотентная операция, то $C_{B,A_1,...,A_m}$ принадлежит семейству средних.

Таблица 1. КвазиOWA-операторы, полученные с использованием известных аддитивных генераторов
[Table 1. Quasi-OWA-operators obtained using known additive generators]

Генератор	Операция
$f_m(x) = 1 - x$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{f_m}(\boldsymbol{x}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i (1 - y_i)$
$g_m(x) = x$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{g_m}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$
$f_p(x) = \ln x$	$F_{\boldsymbol{w}}^{f_p}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} y_i^{w_i}$
$g_p(x) = -\ln(1 - x)$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{g_p}(\boldsymbol{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - y_i)^{w_i}$
$f_0(x) = \dfrac{1 - x}{x}$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{f_0}(\boldsymbol{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} w_i \dfrac{1 - y_i}{y_i}\right)^{-1}$
$g_{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - x}$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{g_{-1}}(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{w_i y_i}{1 - y_i}\right) \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{y_i x_i}{1 - x_i}\right)$
$f_\alpha(x) = \ln\left(\dfrac{\alpha}{x} - (\alpha - 1)\right)$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{f_\alpha}(\boldsymbol{x}) = \alpha \left((\alpha - 1) + \prod_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\alpha}{y_i} - (\alpha - 1)\right)^{w_i}\right)^{-1}$
$g_\beta(x) = \ln \dfrac{1 + \beta x}{1 - x}$	$\tilde{F}_{\boldsymbol{w}}^{g_\beta}(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1 + \beta y_i}{1 - y_i}\right)^{w_i} - 1\right) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1 + \beta y_i}{1 - y_i}\right)^{w_i} + \beta\right)$

Если, например, в качестве B взять взвешенное арифметическое среднее с вектором весов $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$, где $w_i \in [0,1]$ для $i = \overline{1,n}$ и $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, то получим линейную комбинацию функций агрегирования, при этом вес w_i отражает значимость i-й функции агрегирования. Поскольку OWA-оператор является идемпотентным, то на его основе также могут быть построены новые операторы агрегирования. Приведем некоторые примеры операторов агрегирования из данного класса

$$C_{T_1,T_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \gamma \cdot T_1(\boldsymbol{x}) + (1 - \gamma) \cdot T_2(\boldsymbol{y});$$

$$C_{med}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = med_{k_1}(\boldsymbol{x}) \cdot med_{k_2}(\boldsymbol{y});$$

где символом med_k обозначена медиана с параметром k; T – треугольная норма.

Помимо композиции функций агрегирования в [14, 56] предложено понятие композиции «различных источников данных». Пусть, например, имеется два типа данных, и для каждого из них используется своя функция агрегирования. Пусть $B: [0,1]^2 \to [0,1]$, $A_1: [0,1]^n \to [0,1]$, $A_2: [0,1]^m \to [0,1]$ – некоторые функции агрегирования, тогда их композиция $D_{B,A_1,A_2}: [0,1]^{n+m} \to [0,1]$, определяемая в виде

$$D_{B,A_1,A_2}(\boldsymbol{x}_{(n+m)}) =$$
$$= B\left(A_1(x_1, ..., x_n), A_2(x_{n+1}, ..., x_{n+m})\right),$$

называется *двойным оператором агрегирования*.

Заметим, что 0 и 1 являются идемпотентными элементами двойного оператора агрегирования. Оператор двойного агрегирования является монотонным, если монотонны B, A_1, A_2. В [60] рассматривается класс операторов двойного агрегирования, для которых A_1 и A_2 – OWA-операторы, причем здесь также уделено внимание многомерным вариантам

OWA (определены условия для элементов весовых треугольников, обеспечивающие свойства монотонности и идемпотентности).

Как отмечалось выше, одним из стандартных методов конструирования операторов агрегирования является метод φ-преобразования. Заметим, что φ-преобразование может быть применено к двойному оператору [14], тогда

$$\left(D_{B,A_1,A_2}\right)^{\varphi} = D_{B^{\varphi},A_1^{\varphi},A_2^{\varphi}}.$$

Двойственным по отношению к двойному оператору агрегирования A^c является двойной оператор агрегирования вида $(D_{B,A_1,A_2})^c = D_{B^c,A_1^c,A_2^c}$. Двойной оператор агрегирования называется *самодвойственным*, если он совпадает со своим двойственным, т. е. $D_{B,A_1,A_2} = D_{B^c,A_1^c,A_2^c}$. Имеет место следующее утверждение [14]: двойной оператор агрегирования D_{B,A_1,A_2} является самодвойственным тогда и только тогда, когда B, A_1, A_2 являются самодвойственными.

Заметим, что основное отличие этих двух типов композиции заключается в том, что функции агрегирования в первом случае имеют одинаковые области определения, а во втором – разные. Обобщением приведенного выше определения является случай, когда аргументы каждой функции агрегирования формируются специальным образом. Помимо рассмотренных, в [14] вводится композиция для «групп данных». Данный подход к агрегированию актуален для решения проблемы согласования при условии, что определено количество экспертов или лиц, принимающих решение, достаточное для достижения некоторого частичного, но, возможно, неполного консенсуса в группе. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$ – векторная оценка; $C_{n,\alpha}^i\{x_1,...,x_n\}$ представляет подмножество из α элементов множества $\{x_1,...,x_n\}$; $\sigma^*:\{1,...,k\}\to\{1,...,k\}$ – перестановка множества $C_{n,\alpha}^i\{x_1,...,x_n\}$, обеспечивающая лексикографический порядок для различных значений α и $i \in I$, где I –индексное множество; $A,B:\bigcup_{n\in N}[0,1]^n \to [0,1]$ – пара функций агрегирования.

Функция $F_{\alpha;B,A}^{(n)}:\bigcup_{n\in N}[0,1]^n \to [0,1]$, определяемая формулой

$$F_{\alpha;B,A}^{(n)}(\boldsymbol{x}) =$$
$$= B^{(k)}\left(A^{(\alpha)}(C_{n,\alpha}^{\sigma^*(1)}(X)),...,A^{(\alpha)}(C_{n,\alpha}^{\sigma^*(k)}(X))\right),$$

где $X = \{x_1,...,x_n\}$, есть обобщенный оператор агрегирования, называемый *комбинацией функций агрегирования степени* α, где $\alpha \in \{1,...,n\}$, $k = C_n^{\alpha} = \dfrac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Здесь для любого $1 \le i \le k$ формируется последовательность аргументов функции $A^{(\alpha)}$ на основе сочетания $C_{n,\alpha}^{\sigma^*(i)}(X) = C_{n,\alpha}^{\sigma^*(i)}\{x_1,...,x_n\}$, в котором его элементы перечислены в лексикографическом порядке.

Например, предположим, что $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, $B = \max$, $A_i = \min$, причем функции A_i используются для агрегирования всех возможных трехэлементных подмножеств векторной оценки, а оператор B затем агрегирует полученные оценки в некоторую скалярную величину. В этом случае получим следующий оператор агрегирования:

$$F_{3;\max,\min}^{(4)}(\boldsymbol{x}) = \max\{\min\{x_1,x_2,x_3\},$$
$$\min\{x_1,x_2,x_4\},\min\{x_2,x_3,x_4\},\min\{x_1,x_3,x_4\}\}.$$

Заметим, что аргументами $\min$ являются всевозможные сочетания из множества аргументов $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

5. СУММА OWA-ОПЕРАТОРОВ

В [61] предложен подход для построения новых операторов агрегирования в форме выпуклой комбинации некоторых базовых операторов.

Пусть $A_1(\boldsymbol{x})$ и $A_2(\boldsymbol{x})$ – операторы агрегирования; λ – параметр. Рассмотрим отображение $A^{\lambda}:[0,1]^n \to [0,1]$, такое, что

$$A_{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot A_1(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\cdot A_2(\boldsymbol{x}).$$

Возникает следующий вопрос: для каких значений $\lambda \in R$ A_{λ} является оператором агрегирования. Поскольку граничные условия $A_{\lambda}(0,...,0)=0$ и $A_{\lambda}(1,...,1)=1$ выполняются автоматически, то возникает необходимость в обеспечении свойства монотонности. Через $L(A_1,A_2)$ обозначим множество λ, для которых A_{λ} снова является оператором агрегирования. Можно показать, что $L(A_2, A_1) = \{1-\lambda : \lambda \in L(A_1, A_2)\}$.

В [61] доказаны следующие утверждения:

1) если $L(A_1, A_2) = [\lambda_1, \lambda_2]$, то $L(A_2, A_1) = [1-\lambda_2, 1-\lambda_1]$;

2) пусть $D(A_1, A_2) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (\forall p \in \vartriangle A_1)(\forall q \in \vartriangle A_2)(p\lambda + q(1-\lambda) \geq 0)\}$, где $\vartriangle(\bullet)$ – наименьший замкнутый интервал, содержащий возможные значения оператора, A_1 и A_2 – операторы агрегирования, для которых определены $\vartriangle A_1$ и $\vartriangle A_2$ соответственно, тогда $D(A_1, A_2) \subseteq L(A_1, A_2)$.

В частности, если $\vartriangle A_1 = [a_1, b_1]$ и $\vartriangle A_2 = [a_2, b_2]$, то $D(A_1, A_2)$ есть множество решений следующей системы линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1\lambda + a_2(1-\lambda) \geq 0, \\ a_1\lambda + b_2(1-\lambda) \geq 0, \\ b_1\lambda + a_2(1-\lambda) \geq 0, \\ b_1\lambda + b_2(1-\lambda) \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что если $a_1 = a_2 = 0$ и один из интервалов $\vartriangle A_1$ или $\vartriangle A_2$ совпадает с $[0, \infty)$, то $D(A_1, A_2) = [0, 1]$.

Рассмотрим пример. Пусть $F_{\boldsymbol{w}}$ – OWA-оператор с вектором весов $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$, где

$$w_i = \frac{n-i}{C_n^2} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}, \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Определим выпуклую комбинацию данного оператора и среднего арифметического $M(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ при $\lambda = 2$. Новый оператор будет иметь вид $A_2 = 2M - F_{\boldsymbol{w}}$. Тогда

$$A_2(x_1, ..., x_n) = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{2(n-i)}{n(n-1)} x_i =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{n-i}{n-1}\right) x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n(n-1)} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{C_n^2} x_i.$$

Заметим, что A_2 есть оператор, обратный к $F_{\boldsymbol{w}}$, так как $\dfrac{i-1}{C_n^2} = w_{n-i+1}$ $(i = \overline{1,n})$.

Рассмотрим два OWA-оператора $F_{\boldsymbol{w}_1}^n$ и $F_{\boldsymbol{w}_2}^n$ с наборами весов $\boldsymbol{w}_1 = (w_{11}, ..., w_{1n})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_{21}, ..., w_{2n})$ соответственно. В [61] показано, что в этом случае

$$D\left(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n\right) = \left[\frac{\min\limits_i w_{2i}}{\min\limits_i w_{2i} - \max\limits_i w_{1i}}, \frac{\max\limits_i w_{2i}}{\max\limits_i w_{2i} - \min\limits_i w_{1i}}\right].$$

Для выпуклой комбинации OWA-операторов возможно определить интервал $L(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n)$ следующим образом. Для весовых векторов $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$ определим разбиение множества индексов $I = \{1, 2, ..., n\} = I_{12} \cup I_{21} \cup E$, где

$$I_{12} = \{i \in I : w_{1i} > w_{2i}\},$$

$$I_{21} = \{i \in I : w_{2i} > w_{1i}\},$$

$$E = \{i \in I : w_{1i} = w_{2i}\}.$$

Заметим, что первые два множества не могут быть пустыми, так как $\sum_{i=1}^{n} w_{1i} = \sum_{i=1}^{n} w_{2i} = 1$, а третье может быть пустым. Тогда, согласно [61],

$$L\left(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n\right) = \left[\max_{i \in I_{12}}\left(\frac{w_{2i}}{w_{2i} - w_{1i}}\right), \min_{i \in I_{21}}\left(\frac{w_{2i}}{w_{2i} - w_{1i}}\right)\right].$$

Данное утверждение представляет практический интерес, поскольку с его помощью можно охарактеризовать множества пар OWA-операторов, для которых $D(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n) \subseteq L(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n)$, и, в частности, $D(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n) = L(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n)$.

Рассмотрим, например, два OWA-оператора $F_{W_1}^4$ и $F_{W_2}^4$ с векторами весов

$$\boldsymbol{w}_1 = \left(1/8, 3/8, 3/8, 1/8\right)$$

и

$$\boldsymbol{w}_2 = \left(1/64, 9/64, 27/64, 27/64\right).$$

Тогда $P_{12} = \{1, 2\}$, $P_{21} = \{3, 4\}$, $E = \varnothing$. Отсюда следует, что

$$D\left(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n\right) = \left[-1/23, 27/19\right],$$

$$L\left(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n\right) = \left[-1/7, 27/19\right].$$

и $D(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n) \subset L(F_{\boldsymbol{w}_1}^n, F_{\boldsymbol{w}_2}^n)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [3, 8, 12, 14, 21, 26, 43] отмечается, что при выборе подходящего оператора агрегирования, прежде всего, необходимо учитывать его оценки по следующим критериям: выполнение основных аксиом, постулирующих свойства основных классов; опыт применения для широкого круга задач; семантический смысл; возможность адаптации, что обеспечивается за счет настройки параметров; численная эффективность. Концепция порядковых операторов агрегирования, основанная на перегруппировке агрегируемых значений аргументов, позволяет в максимальной степени учитывать требования к процедуре агрегирования. К основным особенностям использования OWA-операторов относятся следующие:

a) в общем случае обобщенная оценка представляет собой взвешенное среднее частных оценок и реализует компромиссную стратегию, при этом на основе числовых характеристик можно определить ее близость к дизъюнктивной или конъюнктивной стратегии;

b) набор весовых коэффициентов всегда можно соотнести с желаемыми свойствами процедуры агрегирования, что осуществляется на этапе моделирования;

c) композиции операций агрегирования, в том числе, OWA-операторов позволяют учесть различные подходы к агрегированию информации из различных источников, информации разных типов, желание использовать несколько стратегий при агрегировании;

d) композиции, а также суммы OWA-операторов, которые позволяют организовать иерархические системы агрегирования информации.

Перспективным направлением является разработка подходов к построению весовых функций, которые задают динамическую систему приоритетов, а, следовательно, появляется возможность изменять стратегии агрегирования с течением времени.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леденева, Т. М.* Моделирование оценочных систем на основе принципа многоальтернативности / Т. М. Леденева, С. Л. Подвальный // Системы управления и информационные технологии. – Воронеж : ВГТУ, 2014. – Т. 57, № 3. – С. 155–161.

2. *Джини, К.* Средние величины / К. Джини. – Москва : Статистика, 1970. – 448 с.

3. *Beliakov, G.* Practical Guide to Averaging Functions / G. Beliakov, H. Bustince. T. Calvo. – Springer, 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24753-3

4. *Леденева, Т. М.* Агрегирование информации в оценочных моделях / Т. М. Леденева, С. Л. Подвальный // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. – № 4. – С. 155–164.

5. *Grabisch, M.* Aggregation functions: Means / M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap // Information Science, 2011. – № 181. – P. 1–22.

6. *Саати, Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – Москва : Радио и связь, 1993. – 280 с.

7. *Белкин, А. М.* Принятие решение: комбинаторные модели аппроксимации информации / А. М. Белкин, М. Ш. Левин. – Москва : Наука, 1990. – 160 с.

8. *Detyniecki, M.* Building an aggregation operator with a balance / M. Detyniecki, B. Bouchon-Meunier // IPMU’2000, Madrid, Spain, July 2000. – P. 686–692.

9. *Detyniecki, M.* Aggregation truth and falsity values / M. Detyniecki, B. Bouchon-Meunier // FUSION’2000, Paris, France, July 2000. – P. 18–24.

10. *Yager, R. R.* Aggregation operators and fuzzy modeling / R. R. Yager // Fuzzy Sets and Systems, 1994. – № 67. – P. 129–145.

11. *Zimmermann, H.-J.* Fuzzy Technologien: prinzipien, werkzeuge, potentiale / H.-J. Zimmermann. – Duesseldorf, 1993. – 251 p.

12. *Herrera, H.* Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators / H. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. L. Verdegay // Fuzzy Sets and Systems,1996. – № 79. – P. 175–190.

13. *Klement, E. P.* Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families / E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap // Fuzzy Sets and Systems, 2004. – № 145. – P. 439–454.

14. *Khameneh, A. Z.* Some construction methods of aggregation operators in decision-making problems: an overview / A. Z. Khameneh, A. Kilicman // Symmetry, 2020. – № 12. – 694. https://doi.org/10.3390/sym12050694

15. *Mesiar, R.* Compensatory operators based on triangular norms and conforms / R. Mesiar // Proc. EUFIT, Aachen, 1995. – P. 131–135.

16. *Ledeneva, T. M.* Analysis of additive generators of fuzzy operations represented by rational functions / T. M. Ledeneva // Journal of Physics: Conf. Series 973 (2018) 012037. htpps://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012037.

17. *Zhao, H.* Generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets / H. Zhao, Z. S. Xu, M. F. Ni, S. S. Lui // International Journal of Intelligent Systems and Applications, 2010. – № 25. – P. 1–30.

18. *Zhang, G.* Some normal intuitionistic fuzzy heronian mean operators using Hamacher Operation and their applications / G. Zhang, Z. Zhang, H. Kong // Symmetry, 2018. – № 10. – P. 199.

19. *Wang, W. Z.* Intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators based on Einstein operations / W. Z. Wang, X. W. Liu // International Journal Intelligent Systems, 2011. – № 26. – P. 1049–1075.

20. *Komornikova, M.* Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classifications / M. Komornikova, R. Mesiar // Fuzzy Sets and Systems, 2011. – № 175(1). – P. 48–56.

21. *Yager, R. R.* Families of OWA operators / R. R. Yager // Fuzzy Sets and Systems, 1993. – № 59. – P. 125–148.

22. *Martinez, D.L.L.R.* Aggregation operators review – Mathematical properties and behavioral measures / D.L.L.R. Martinez and J. C. Acosta // International Journal of Intelligent Systems and Applications, 2015. – № 7. – P. 63–76.

23. *Grabisch, M.* Aggregation Functions / M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, E. Pap. – Cambridge : Cambridge University Press, 2009. – 460 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139644150

24. *Calvo, T.* Generalized medians / T. Calvo, R. Mesiar // Fuzzy Sets and Systems, 2001. – № 124. – P. 59–64.

25. *Dubois, D.* Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory, The Reliability of Expert Systems / D. Dubois, H. Prade, E. Hollnagel (ed). – Chichester : Ellis Horwood Limited, 1986. – P. 64–118.

26. *Yager, R. R.* The ordered weighted averaging operators: theory and applications / R. R. Yager, J. Kacprzyk J. – Boston, Dordrecht, London : Kluwer Academic Publisher, 1997.

27. *Larsen, H. L.* Construction of OWA operators with desired properties / H. L. Larsen // Fuzzy Sets and Systems, 2002. – № 94. – P. 167–183.

28. *Леденева, Т. М.* Моделирование свойств порядковых операторов взвешенного агрегирования / Т. М. Леденева, М. В. Тафинцева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2006. – № 1. – С. 66–72.

29. *Renyi, A.* On measures of entropy and information / A. Renyi // Proc. 4th Berkley Symp. on Mathematical Statistics and Probability. – California : University of California Press, 1961. – Vol. 1. – P. 747–561.

30. *Fuller, R.* On obtaining minimal variability OWA operator weights / R. Fuller, P. Majlender // Fuzzy Sets and Systems, 2003. – № 136. – P. 203–215.

31. *Jin, L.* Fuzzy orness measure and new orness axioms / L. Jin, M. Kalina, Q. Gang // Kybernetika, 2015. – Vol. 51, Is. 4. – P. 712–723. DOI: 10.14736/kyb-2015-4-0712

32. *Yager, R. R.* Quantifier guided aggregation using OWA operators / R. R. Yager // International Journal of Intelligent Systems, 1996. – № 11. – P. 49–73.

33. *Zeshui, Xu* An overview of methods for determining OWA weights: Research Articles / Xu Zeshui // International Journal Intelligent Systems, 2005. – № 20(8). – P. 843–865.

34. *Matveev, M.* The study of fuzzy quantifiers in multi-criteria decision-making / M. Matveev, N. Aleynikova, V. Safonov, L. Korobova // Communications in Computer and Information Science, 2022. – 1539 CCIS. – P. 167–179.

35. *Amin, G. R.* Parametric aggregation in ordered weighted averaging / G. R. Amin and Ali

Emrouznejad // International Journal Approximation Reasoning, 2011. – Vol. 52, № 6. – P. 819–827.

36. *Zarghami, M.* Revising the OWA operator for multi criteria decision making problem under uncertainty / M. Zarghami, F. Szidarovszky // European Joupnal of Operational Research, 2009. – № 198. – P. 259–265.

37. *Garcia-Zamora, D.* An ordered weighted averaging operator based on extreme values reductions / D. Garcia-Zamora, A. Labello, R. M. Rodriguez, L. Martinez // Atlantis Studies in Uncertainty Modelling, 2021. – Vol. 3. – P. 290–297.

38. *Kolesarova, A.* Power stable aggregation functions / A. Kolesarova, R. Mesiar, T. Ruckschlossova // Fuzzy Sets and Systems, 2014. – 240. – P. 39–50.

39. *O'Hagan, M.* Aggregating template or rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy sets logic / M. O'Hagan // Twenty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 1988. – P. 681–689.

40. *Majlender, P.* OWA-operators with maximal Renyi entropy / P. Majlender // Fussy sets and systems, 2005. – № 155. – P. 340–360.

41. *Fishburn, P. C.* Analysis of decisions with incomplete knowledge of probabilities / P. C. Fishburn // Operations Research, 1965. – Vol. 3, № 1. – P. 217–237.

42. *Сигал, А. В.* Использование последовательностей Фишберна для адекватного моделирования по выборочным данным / А. В. Сигал // Бизнес-информатика, 2021. – Т. 15, № 4. – С. 50–56.

43. *Klement, E. P.* Measure-based aggregation operators / E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap // Fuzzy Sets and Systems, 2004. – № 142. – P. 3–14.

44. *Llamazares, B.* Constructing Choquet integral-based operators that generalize weighted means and OWA operators / B. Llamazares // Information Fusion, 2015. – № 23. – P. 131–138.

45. *Smolikova, R.* Aggregation operators for selection problems / R. Smolikova, M. P. Wachowiak // Fuzzy Sets and Systems, 2002. – № 131. – P. 23–34.

46. *Матвеев, М. Г.* Информационные технологии формирования предложений на электронной торговой площадке с технологией маркетплейс / М. Г. Матвеев // Экономика и математические методы, 2021. – Т. 57, № 1. – С. 105–112.

47. *Llamazares, B.* Construction of Choquet integrals through unimodal weighting vectors / B. Llamazares // International Journal Intelligent Systems, 2018. – № 20(8). – P. 771–790.

48. *Yager, R. R.* OWA aggregation with an uncertainty over the arguments / R. R. Yager // Information Fusion, 2019. – № 52. – P. 206–212. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2018.12.009

49. *Mesiar, R.* Bipolar ordered weighted averages: BIOWA operators / R. Mesiar, A. Stupnanova, L. Jin // Fuzzy sets and Systems, 2021. https://doi/10.1016/j.fss.2021.01.010

50. *Chiclana, F.* Induced ordered weighted geometric operators and use in the aggregation of multiplicative preference relations / F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera and S. Alonso // International Journal of Intelligent Systems, 2004. – № 19. – P. 233–255.

51. *Ledeneva, T.* Special Aspects of the Design of Fuzzy Inference Mechanism. – 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), 2020. – P. 128–132. https://doi/10.1109/SUMMA50634.2020.9280644

52. *Mayor, G.* On extended aggregation functions / G. Mayor, T. Calvo // Proc. IESA, Prague, 1997. – P. 281–285.

53. *Mas, M.* Generation of multi-dimensional aggregation functions / M. Mas, G. Mayor, J. Suner, J. Torrens // Mathware – Soft Computing, 1998. – № 5. – P. 233–242.

54. *Calvo, T.* Generation of weighting triangles associated with aggregation functions / T. Calvo and [ets] // International Journal of Uncertainty Fuzziness Knowledge-based Systems, 2000. – № 8. – P. 417–451.

55. *Dombi, J. D.* Weighted aggregation systems and an expectation level-based weighting and scoring procedure / J. D. Dombi, T. Jonas // European Journal of Operational Research, 2022. – № 299. – P. 580–588.

56. *Mesiar, R.* Aggregation function on [0,1] / R. Mesiar, A. Kolesarova, A. Komornikova // Handbook of Computational Intelligense, 2015. – P. 61–74.

57. *Calvo, T.* Continuous generated associative aggregation operators / T. Calvo, R. Mesiar // Fuzzy Sets and Systems, 2002. – № 126. – P. 191–197.

58. *Ledeneva, T.* Additive generators of fuzzy operations in the form of linear fractional functions / T. Ledeneva // Fuzzy Sets and Systems, 2022. – № 427. – P. 37–54. https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.11.020

59. *Ledeneva, T.* New family of triangular norms for decreasing generators in the form of a logarithm of a linear fractional function / T. Ledeneva // Fuzzy Sets and Systems, 2020. – № 386. – P. 1–24. https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.03.005.

60. *Calvo, T.* Double aggragation operators / T. Calvo, A. Pradera // Fuzzy Sets and Systems, 2004. – № 142. – P. 15–33.

61. *Calvo, T.* Weighted sums of aggregation operators / T. Calvo, B. De Baets, R. Mesiar // Mathware – Soft Computing, 1999. – № 6. – P. 33–47.

Леденева Татьяна Михайловна – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3944-2266

Левкина Ирина Николаевна – аспирант заочной формы обучения кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: levkinain@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4041-1907

DOI: https://doi.org/
Received 14.03.2022
Accepted 22.04.2022

ISSN 1995-5499

REVIEW OF MAIN CLASSES OF ORDER WEIGHTED AGGREGATION OPERATORS

© 2022 T. M. Ledeneva✉, I. N. Levkina

Voronezh State University
1, Universitetskaya Square, 394018 Voronezh, Russian Federation

Annotation. The article discusses the main classes of ordinal weighted aggregation operations, which are widely used due to the presence of a number of numerical characteristics that provide a targeted approach to the organization of the information aggregation procedure in monitoring systems, information and analytical systems, in expert systems and decision support systems, in fuzzy systems and others in which information is processed within the framework of evaluation models. A feature of this type of operators is that before aggregation, the vector evaluation of the object is ordered in non-increasing or non-decreasing order, which allows you to directly take into account the values of the components, and not the importance of information sources, as is done when using weighted averages. Modeling of aggregation operations of this class is reduced to the development of approaches for determining the weight coefficients. By assigning weights in a certain way, it is possible to design an aggregation procedure with certain properties, in particular, a strategy, compensation properties, and a level of uniformity in taking into account

✉ Ledeneva Tatyana M.
e-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

the components of a vector assessment. The article discusses various families of operations that implement the technology of ordinal weighted aggregation, their generalizations and modifications, as well as important cases. The connection of these operators with the Sugeno and Choquet integrals is shown, as well as generalized representations based on fuzzy measures. The presented review of foreign publications opens up opportunities for the wide use of aggregation operations from this class in the development of information processing procedures in various application systems, allowing for greater flexibility, multiple alternatives, validity and interpretability.
Keywords: OWA operator, weight coefficients, aggregation.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *Ledeneva T. M. and Podval'ny S. L.* (2014) Modelirovaniye otsenochnykh sistem na osnove printsipa mnogoal'ternativnosti. *Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii.* 57(3). P. 155–161 (in Russian)

2. *Dzhini K.* (1970) Sredniye velichiny. Moskva : Statistika (in Russian).

3. *Beliakov G., Bustince H. and Calvo T.* (2016) Practical Guide to Averaging Functions. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24753-3

4. *Ledeneva T. M. and Podval'ny S. L.* (2016) Agregirovaniye informatsii v otsenochnykh modelyakh. *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii.* (4). P. 155–164. (in Russian)

5. *Grabisch M., Marichal J.-L., Mesiar R. and Pap E.* (2011) Aggregation functions: Means. *Information Science.* (181). P. 1–22.

6. *Saati T.* (1993) Prinyatiye resheniy. Metod analiza iyerarkhiy. Moskva : Radio i svyaz. (in Russian)

7. *Belkin A. M. and Levin M. SH.* (1990) Prinyatiye resheniye: kombinatornyye modeli approksimatsii informatsii. Moskva : Nauka. (in Russian)

8. *Detyniecki M. and Bouchon-Meunier B.* (2000) Building an aggregation operator with a balance in IPMU, July 2000, Madrid, Spain. P. 686–692.

9. *Detyniecki M. and Bouchon-Meunier B.* (2000) Aggregation truth and falsity values in FUSION'2000, July 2000, Paris, France. P. 18–24.

10. *Yager R. R.* (1994) Aggregation operators and fuzzy modeling. *Fuzzy Sets and Systems.* (67). P. 129–145.

11. *Zimmermann H.-J.* (1993) Fuzzy Technologien: prinzipien, werkzeuge, potentiale. Duesseldorf.

12. *Herrera H., Herrera-Viedma E. and Verdegay J. L.* (1996). Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems.* (79). P. 175–190.

13. *Klement E. P., Mesiar R. and Pap E.* (2004) Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families. *Fuzzy Sets and Systems.* (145). P. 439–454.

14. *Khameneh A. Z. and Kilicman A.* (2020) Some construction methods of aggregation operators in decision-making problems: an overview. *Symmetry.* (12). P. 694. https://doi.org/10.3390/sym12050694

15. *Mesiar R.* (1995) Compensatory operators based on triangular norms and conforms in *Proc. EUFIT*, Aachen, 1995. P. 131–135.

16. *Ledeneva T. M.* (2018) Analysis of additive generators of fuzzy operations represented by rational functions. *Journal of Physics: Conf. Series.* 973 (012037). htpps://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012037.

17. *Zhao H., Xu Z. S., Ni M. F. and Lui S. S.* (2010) Generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems and Applications.* (25). P. 1–30.

18. *Zhang G., Zhang Z. and Kong Zhang H.* (2018) Some normal intuitionistic fuzzy heronian mean operators using Hamacher Operation and their applications. *Symmetry* (10). P 199.

19. *Wang W. Z. and Liu X. W.* (2011) Intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators based on Einstein operations. *International Journal Intelligent Systems.* (26). P. 1049–1075.

20. *Komornikova M. and Mesiar R.* (2011) Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classifications. *Fuzzy Sets and Systems*. 175(1). P. 48–56.

21. *Yager R. R.* (1993) Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems.* (59). P. 125–148.

22. *Martinez D.L.L.R. and Acosta J. C.* (2015) Aggregation operators review – Mathematical properties and behavioral measures. *International Journal of Intelligent Systems and Applications.* (7). P 63–76.

23. *Grabisch M., Marichal J., Mesiar R. and& Pap E.* (2009) Aggregation Functions. Cambridge : Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139644150

24. *Calvo T. and Mesiar R.* (2001) Generalized medians. *Fuzzy Sets and Systems.* (124). P. 59–64.

25. *Dubois D. and Prade H.* (1986) Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory, in Hollnagel, E. (ed) *The Reliability of Expert Systems*. Chichester : Ellis Horwood Limited. P. 64–118.

26. *Yager R. R. and Kacprzyk J.* (1997) The ordered weighted averaging operators: theory and applications. Boston, Dordrecht, London : Kluwer Academic Publisher.

27. *Larsen H. L.* (2002) Construction of OWA operators with desired properties. *Fuzzy Sets and Systems.* (94). P. 167–183.

28. *Ledeneva T. M. and Tafintseva M. V.* (2006) Modelirovaniye svoystv poryadkovykh operatorov vzveshennogo agregirovaniya. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika.* (1). P. 66–72.

29. *Renyi A.* (1961) On measures of entropy and information. *Proc. 4th Berkley Symp. on Mathematical Statistics and Probability.* California : University of California Press. Vol. 1. P. 747–561.

30. *Fuller R. and Majlender R.* (2003) On obtaining minimal variability OWA operator weights. *Fuzzy Sets and Systems.* (136). P. 203–215.

31. *Jin L., Kalina M. and Gang Q.* (2015) Fuzzy orness measure and new orness axioms. *Kybernetika*. 51(4). P. 712–723. DOI: 10.14736/kyb-2015-4-0712.

32. *Yager R. R.* (1996) Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems.* (11). P. 49–73.

33. *Zeshui Xu* (2005) An overview of methods for determining OWA weights: Research Articles. *International Journal Intelligent Systems*. 20(8). P. 843–865.

34. *Matveev M., Aleynikova N., Safonov V. and Korobova L.* (2022) The study of fuzzy quantifiers in multi-criteria decision-making. *Communications in Computer and Information Science*. 1539 CCIS. P. 167–179.

35. *Amin G. R. and Emrouznejad Ali.* (2011) Parametric aggregation in ordered weighted averaging. *International Journal Approximation Reasoning*. 52 (6). P. 819–827.

36. *Zarghami M. and Szidarovszky F.* (2009) Revising the OWA operator for multi criteria decision making problem under uncertainty. *European Joupnal of Operational Research.* (198). P. 259–265.

37. *Garcia-Zamora D., Labello A., Rodriguez R. M. and Martinez L.* (2021) An ordered weighted averaging operator based on extreme values reductions. *Atlantis Studies in Uncertainty Modelling.* (3). P. 290–297.

38. *Kolesarova A., Mesiar R. and Ruckschlossova T.* (2014) Power stable aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems.* (240). P. 39–50.

39. *O'Hagan M.* (1988) Aggregating template or rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy sets logic in *22 Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. P. 681–689.

40. *Majlender P.* (2005) OWA-operators with maximal Renyi entropy. *Fussy sets and systems.* (155). P. 340–360.

41. *Fishburn P. C.* (1965) Analysis of decisions with incomplete knowledge of probabilities. *Operations Research*. 3(1). P. 217–237.

42. *Sigal A. V.* (2021) Ispol'zovaniye posledovatel'nostey Fishberna dlya adekvatnogo modelirovaniya po vyborochnym dannym. *Biznes-informatika*. 15(4). P. 50–56.

43. *Klement E. P., Mesiar R. and Pap E.* (2004) Measure-based aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems.* (142). P. 3–14.

44. *Llamazares B.* (2015) Constructing Choquet integral-based operators that generalize weighted means and OWA operators. *Information Fusion*. (23). P. 131–138.

45. *Smolikova R. and Wachowiak M. P.* (2002) Aggregation operators for selection problems. *Fuzzy Sets and Systems.* (131). P. 23–34.

46. *Matveev M. G.* (2021) Informatsionnyye tekhnologii formirovaniya predlozheniy na elektronnoy torgovoy ploshchadke s tekhnologi-

yey marketpleys. *Ekonomika i matematicheskiye metody*. 57(1). P. 105–112.

47. *Llamazares, B.* (2018) Construction of Choquet integrals through unimodal weighting vectors. *International Journal Intelligent Systems*. 20(8). P. 771–790.

48. *Yager R. R.* (2019) OWA aggregation with an uncertainty over the arguments. *Information Fusion.* (52). P. 206–212. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2018.12.009

49. *Mesiar R., Stupnanova A. and Jin L.* (2021) Bipolar ordered weighted averages: BIOWA operators. *Fuzzy sets and Systems* (in press). https://doi/10.1016/j.fss.2021.01.010

50. *Chiclana F., Herrera-Viedma E., Herrera F. and Alonso S.* (2004) Induced ordered weighted geometric operators and use in the aggregation of multiplicative preference relations. *International Journal of Intelligent Systems.* (19). P. 233–255.

51. *Ledeneva T.* (2020) Special Aspects of the Design of Fuzzy Inference Mechanism in *2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency* (SUMMA). P. 128–132. https://doi/10.1109/SUMMA50634.2020.9280644

52. *Mayor G. and Calvo T.* (1997) On extended aggregation functions in *Proc. IESA*, Prague. P. 281–285.

53. *Mas M., Mayor G., Suner J. and Torrens J.* (1998) Generation of multi-dimensional aggregation functions. *Mathware & Soft Computing.* (5). P. 233–242.

54. *Calvo T. and [ets]* (2000) Generation of weighting triangles associated with aggregation functions. *International Journal of Uncertainty Fuzziness Knowledge-based Systems.* (8). P. 417–451.

55. *Dombi J. D. and Jonas T.* (2022) Weighted aggregation systems and an expectation level-based weighting and scoring procedure. *European Journal of Operational Research.* (299). P. 580–588.

56. *Mesiar R., Kolesarova A. and Komornikova A.* (2015) Aggregation function on [0,1]. *Handbook of Computational Intelligense*. P. 61–74.

57. *Calvo T. and Mesiar R.* (2002) Continuous generated associative aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems.* (126). P. 191–197.

58. *Ledeneva T.* (2022) Additive generators of fuzzy operations in the form of linear fractional functions. *Fuzzy Sets and Systems.* (427). P. 37–54. https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.11.020

59. *Ledeneva T.* (2022) New family of triangular norms for decreasing generators in the form of a logarithm of a linear fractional function. *Fuzzy Sets and Systems.* (386). P. 1–24. https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.03.005.

60. *Calvo T. and Pradera A.* (2004) Double aggragation operators. *Fuzzy Sets and Systems.* (142). P. 15–33.

61. *Calvo T., De Baets B. and Mesiar R.* (1999) Weighted sums of aggregation operators. *Mathware & Soft Computing* (6). P. 33–47.

Ledeneva Tatyana M. – Dr. tech. sciences, prof., Head of Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Voronezh State University.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3944-2266

Levkina Irina N. – post-graduate student of the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Voronezh State University.
E-mail: levkinain@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4041-1907